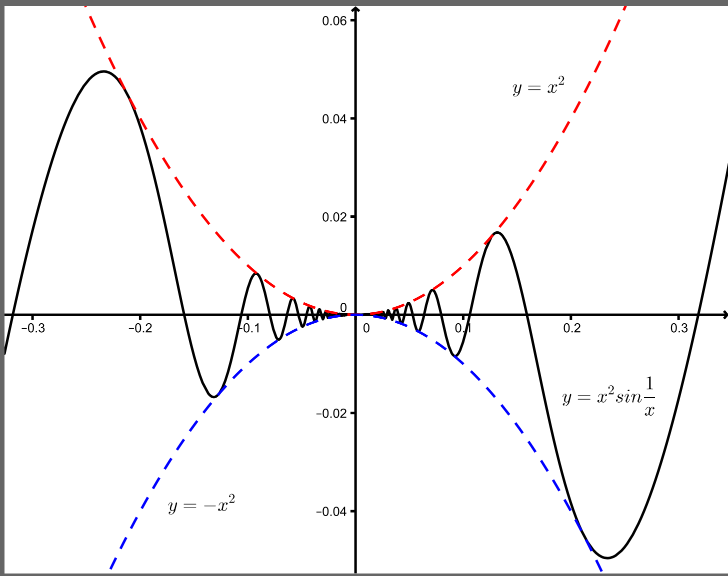


2020
2η Έκδοση

ΗΛΙΑΣ ΠΑΠΠΑΣ

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΥΤΟΕΚΔΟΣΗ *ΗΓΟΥΜΕΝΙΤΣΑ*

ΗΛΙΑΣ ΠΑΠΠΑΣ

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Αυτοέκδοση
ΗΓΟΥΜΕΝΙΤΣΑ 2020

Τίτλος: Αντιπαραδείγματα στα μαθηματικά
Συγγραφέας: Ηλίας Παππάς

2η Έκδοση: Μάρτιος 2020
ISBN 978-618-00-1916-2

1η Έκδοση (Έντυπη):	Δεκέμβριος 2017	ISBN 978-960-93-9703-2
2η Έκδοση (e-book):	Μάρτιος 2020	ISBN 978-618-00-1916-2

Ηλίας Παππάς / elias-p@freemail.gr
Αντιπαραδείγματα στα μαθηματικά / Ηλίας Παππάς
Αυτοέκδοση / Ηγουμενίτσα, Μάρτιος 2020
Σελ. 250 – Σχήμα B5 με διαστάσεις $176mm \times 250mm$.
Συμπεριλαμβάνονται εξώφυλλο, βιβλιογραφία, ευρετήριο, παραρτήματα.

Χρησιμοποιήθηκε η επέκταση pdfLaTeX του προγράμματος στοιχειοθέτησης, γράφοντας στον (ASCII editor) επεξεργαστή απλού κειμένου gedit, στο λειτουργικό σύστημα Linux με τη διανομή Ubuntu.

Το εξώφυλλο δημιουργήθηκε με τη βοήθεια του πακέτου PSTricks με το οποίο γίνεται εισαγωγή γραφικών της γλώσσας προγραμματισμού περιγραφής σελίδων PostScript (PS) στη LaTeX.

Τα γραφήματα έχουν γίνει με το πρόγραμμα Geogebra και τα πακέτα παραγωγής (vector graphics) διανυσματικών γραφικών TikZ και PGF.

Το παρόν έργο μπορεί να βρεθεί στη διεύθυνση:

https://antiparadeigma.blogspot.com

Το βιβλίο μου αυτό αφιερώνω
στην Κατερίνα
και στα παιδιά μου
Άρτεμις και Θάνο

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στις επόμενες σελίδες θα προσπαθήσουμε να ρίξουμε λίγο φως σε στοιχειώδεις έννοιες από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών.

Αυτός ο κοινότυπος στόχος όμως θα επιτευχθεί μέσα από μια πορεία εξέτασης και διερεύνησης αντίθετων, αντίστροφων εννοιών, αντιπαραδειγμάτων, αρνήσεων και γενικά μεθόδων κατά κανόνα "μη ενδεδειγμένων" ως βασικών για την κατανόηση και εκμάθηση μαθηματικών εννοιών.

Στη βιβλιογραφία συνήθως οι παραπάνω τρόποι χρησιμοποιούνται ως δευτερεύοντες και βοηθητικοί ή συμπληρωματικοί για την αποσαφήνηση της "καταφατικής" φύσης των ορισμών και των προτάσεων.

Αυτή η κατάφαση είναι που πολλές φορές μπερδεύει και δίνει την εντύπωση πως έχουμε καταλάβει πλήρως μια έννοια, η οποία ορίζεται πάντα ως εξής:

Δίνεται λεπτομερώς η εξήγηση για το "τι είναι ένα αντικείμενο", για το "πότε συμβαίνει ένα γεγονός". Δε μας λένε όμως "πότε δεν είναι", "πότε δεν ισχύει κάτι" ή ποιά είναι η αιτία που δεν ισχύει.

Η δυσκολία καταννόησης απορρέει από το γεγονός πως όταν αλλάξουμε - έστω και στο ελάχιστο πολλές φορές - τα δεδομένα μιας υπόθεσης, τότε το συμπέρασμα είναι τελείως διαφορετικό από ότι προηγουμένως. Η ισορροπία υπόθεσης - συμπεράσματος είναι πολύ 'εύθραυστη". Και ενίοτε μας διαφεύγει κάτι από την υπόθεση, λόγω απροσεξίας ή επειδή φαντάζει ασήμαντο.

Κάπως έτσι κατασκευάστηκαν πολλοί από τους ισχυρισμούς, προβλήματα, ερωτήματα του βιβλίου. Αφαιρώντας δεδομένα από γνωστά θεωρήματα, αντιστρέφοντας προτάσεις για τις οποίες δεν ισχύει η αντιστροφή, δημιουργήθηκαν εσφαλμένοι ισχυρισμοί που εκ πρώτης όψης φαίνονται συνήθως ορθοί, εκτός και αν υπάρχει βαθιά γνώση θεωρίας. Ο έλεγχος ως προς την ορθότητά τους ή μη, είναι το σωστό μονοπάτι για τη μάθηση και εμπέδωση δύσκολων μαθηματικών εννοιών.

Δύσβατο, αλλά με τη σωστή καθοδήγηση του δασκάλου και τα κατάλληλα παραδείγματα-αντιπαραδείγματα, φτάτουμε τουλάχιστον κοντά στο στόχο: Να μάθουμε όχι μόνο εφαρμογή και κανόνες των μαθηματικών αλλά και πως να παράγουμε γνώση, να ανακαλύπτουμε από τη γνώση που κατέχουμε, να μάθουμε πως να μαθαίνουμε. Την ουσία δηλαδή των μαθηματικών, αυτό που και το όνομά τους σημαίνει.

Μαθαίνω σημαίνει αλλάζω γνωστικές δομές στο μυαλό μου, πάω πέρα από τις πολύ γνωστές ιδέες και ενάντια σε λαθεμένες αρχικές έννοιες. Κατά τον J.Piaget, ο θεμελιακός ρόλος των δασκάλων, είναι να παρέχει μερικά αντιπαραδείγματα σε λαθεμένα συμπεράσματα, και με αυτό τον τρόπο να δημιουργεί νέες γνωστικές συγκρούσεις.

Πολλές φορές, η λαθεμένη γνώση είναι τόσο ισχυρή, ώστε να αποκλείεται κάθε αμφιβολία. Έτσι λειτουργεί ανασχετικά, εμποδίζει τη γνωστική πρόοδο και εναντιώνεται σε κάθε νέα ιδέα. Έχουμε το λεγόμενο ‘έπιστημολογικό εμπόδιο”.

Η υπέρβαση αυτού του εμποδίου στο δρόμο προς τη μάθηση, θα επιτευχθεί με την εγκατάλείψη, την απόρριψη, την άρνηση της παλιάς, λαθεμένης γνώσης, μέσα από κατάλληλα μαθηματικά προβλήματα που οδηγούν σε αντιφάσεις και γνωστικές συγκρούσεις. Έτσι, το να μπορείς να εκφράσεις την άρνηση μιας πρότασης και την αντίστροφή της, να αποδεικνύεις το αντίθετο, να έχεις την ικανότητα εύρεσης αντιπαραδείγματος, να καταννοείς έννοιες λογικής και μεθόδους απόδειξης, όπως: για κάθε, διάζευξη, ισοδυναμία προτάσεων, αντιθετοαντιστροφή πρότασης, επαγωγή, απαγωγή σε άτοπο, είναι απαραίτητα εφόδια, τα οποία το παρόν βιβλίο φιλοδοξει να συλλέξει μέσα από τη μεγάλη και εκτενή βιβλιογραφία, όπου βρίσκονται σκόρπια, - εκτός ελάχιστων, ξενόγλωσσων κυρίως περιπτώσεων - και να τα ταξινομήσει με ένα τρόπο που πιστεύω θα βοηθήσει τον αναγνώστη.

Πολλά από τα αντιπαραδείγματα βρίσκονται σε περισσότερα του ενός συγγράμματα, αγνοώντας έτσι την αρχική πηγή. Άλλα έχουν παραχθεί μετά από προσωπικό κόπο σαν απάντηση σε ερωτήματα μαθητών ή τυχαία μέσα απο αντίστροφη σκέψη: παρατηρώντας πρώτα τις ιδιότητές τους και αντιστοιχίζοντάς τα μετά με αντίστροφες προτάσεις που δεν ισχύουν.

Όλα όμως έλκουν την προσοχή μας γιατί κλονίζουν και "έμπαίζουν" τη σκέψη μας.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Μέρος I

ΘΕΩΡΙΑ

Κεφάλαιο 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Διάζευξη - Σύζευξη

Εκτός από τα σύμβολα των στοιχειωδών πράξεων $+, -, /, *$, των πράξεων της σύνθεσης και αντιστροφής συναρτήσεων, είναι πολύ σημαντικό κάποιος να γνωρίζει τη σωστή χρήση της συνεπαγωγής "$\Rightarrow$", της ισοδυναμίας "$\Leftrightarrow$", του διάφορου "$\neq$", της σύζευξης "και" με το σύμβολο "$\wedge$", της διάζευξης (ή αλλιώς εγκλειστικής διάζευξης) "ή" με το σύμβολο "$\vee$" και της αποκλειστικής διάζευξης "ή μόνο ... ή μόνο ... " με το σύμβολο "$\veebar$".

Παράδειγμα 1.1. Η παρακάτω συνεπαγωγή "$\Rightarrow$"

$$\text{Αν } \alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

σημαίνει ότι:
Αν το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ ισούται με μηδέν τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ή $\{\alpha = 0 \text{ και } \beta = 0\}$. Αν χρησιμοποιήσουμε την αποκλειστική διάζευξη "ή *μόνο* $\alpha = 0$ ή *μόνο* $\beta = 0$" θα είναι λάθος γιατί το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ μπορεί να ισούται με μηδέν και να έχουμε και $\alpha = 0$ και $\beta = 0$. Άρα εδώ το σωστό είναι να χρησιμοποιήσουμε την διάζευξη ή αλλιώς εγκλειστική διάζευξη "ή" που σημαίνει: αρκεί ένα τουλάχιστον από τα δύο να ισούται με μηδέν, δηλαδή $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ή $\{\alpha = 0 \text{ και } \beta = 0\}$.

Θα ήταν λάθος να χρησιμοποιήσουμε μόνο τη σύζευξη "και", δηλαδή

$$\text{Αν } \alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$

διότι είναι πλεονασμός ο οποίος δε συνεπάγεται από την υπόθεση αφού αρκεί και ένα μόνο από τα δύο να ισούται με μηδέν.
Ισχύει όμως και το αντίστροφο. Αρκεί ένα τουλάχιστον από τα α, β να είναι μηδέν, ώστε το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ να είναι μηδέν.

$$\text{Αν } \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 0$$

Αρα ισχύει η **ισοδυναμία**

$$\text{Αν } \alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Παρατήρηση 1.2. *Το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ ισούται με μηδέν όταν ένας μόνο από τους δύο παράγοντες ή και οι δύο είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει ότι*

$$\textit{Αν } \alpha = 0 \textit{ ή } \beta = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 0$$

αλλά ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα όταν και οι δύο παράγοντες είναι μηδέν

$$\textit{Αν } \alpha = 0 \textit{ και } \beta = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 0$$

Τίθεται τώρα το ερώτημα:

Ποια από τις δύο προτάσεις θα έπρεπε να επιλέξουμε σαν "ορισμό" για το μηδενικό γινόμενο;

Η σωστή απάντηση είναι η πρώτη πρόταση, γιατί αυτό που απαιτούμε στη δεύτερη, δηλαδή να είναι το α και το β μηδέν, είναι υπεραρκετό για να ισχύει το συμπέρασμα. Όμως το μηδενικό γινόμενο, μπορεί να προκύψει και με λιγότερες προϋποθέσεις, δηλαδή το ένα τουλάχιστον από τα δύο να είναι μηδέν αρκεί.

Επίσης, ένα χρήσιμο κριτήριο για κάνουμε τη σωστή επιλογή της πρότασης, είναι να διαλέξουμε αυτή για την οποία ισχύει και το αντίστροφο, που στην προκειμένη περίπτωση είναι μόνο η πρώτη.

Γενικότερα, στα μαθηματικά σε κάθε πρόταση, η υπόθεση περιέχει τις ελάχιστες προϋποθέσεις ώστε να ισχύει το συμπέρασμα

Παράδειγμα 1.3. Ας δούμε τώρα τι γίνεται όταν στο προηγούμενο παράδειγμα αντί για "=" έχουμε "≠".
Έχουμε

$$\text{Αν } \alpha \cdot \beta \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

αλλά και το αντίστροφο

$$\text{Αν } \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta \neq 0$$

δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία

$$\text{Αν } \alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Δεν ισχύει όμως σε καμμία περίπτωση, ούτε το ευθύ, ούτε το αντίστροφο, αν στη θέση του "και" βάλουμε το "ή", γιατί αν ένα τουλάχιστον από τα δύο είναι μηδέν τότε και το γινόμενο είναι μηδέν. Αναγκαστικά και τα δύο πρέπει να είναι διάφορα του μηδενός.

Γενικά, όταν αλλάζουμε το "=" με το "≠" και αντίστροφα, αλλάζουμε και τη διάζευξη "ή" με τη σύζευξη "και". Τα σύμβολα "=" και "≠" είναι αντίθετα και η άρνηση του ενός είναι το άλλο. Το ίδιο επίσης ισχύει και για τα σύμβολα της διάζευξης "ή" και της σύζευξης "και".

Ας δούμε και το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.4. Ισχύει

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$

και επίσης

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$$

1.2 Συνεπαγωγή - Ισοδυναμία

Γράφουμε

$$P \Rightarrow Q$$

και διαβάζουμε:

Η πρόταση P συνεπάγεται την πρόταση Q.
ή
Αν ισχύει η πρόταση P τότε ισχύει και η πρόταση Q.

Αυτό σημαίνει ότι η ισχύς της πρότασης P είναι ικανή να παράγει την ισχύ της πρότασης Q. Δεν είναι αναγκαία όμως για την ισχύ της Q. Δηλαδή δεν ισχύει το αντίστροφο, που σημαίνει ότι μπορεί να ισχύει η πρόταση Q χωρίς απαραίτητα να ισχύει η πρόταση P.
Λέμε επίσης ότι η ισχύς της πρότασης Q είναι αναγκαία για να ισχύει η πρόταση P. Δεν είναι όμως ικανή να παράγει την ισχύ της P.
Αν ισχύει και η συνεπαγωγή

$$Q \Rightarrow P$$

τότε η Q θα είναι αναγκαία και ικανή ώστε να ισχύει η P, δηλαδή θα έχουμε ισοδυναμία.

Γράφουμε

$$P \Leftrightarrow Q$$

και διαβάζουμε:

Η πρόταση P είναι ισοδύναμη με την πρόταση Q.

Πολλές φορές όμως θα συναντήσουμε και άλλες εκφράσεις που είναι ισοδύναμες όπως:

- Οι προτάσεις P και Q είναι ισοδύναμες.
- Η ισχύς της P συνεπάγεται την ισχύ της Q και αντίστροφα.
- Η P είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να ισχύει η Q.
- Για να ισχύει η P πρέπει και αρκεί να ισχύει η Q.
- Η πρόταση P ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η πρόταση Q.
- Η πρόταση P ισχύει τότε και μόνο τότε αν ισχύει η πρόταση Q.

- Η πρόταση P ισχύει ανν ισχύει η πρόταση Q. (το ανν με δύο ν)

Πολλές φορές δουλεύουμε με την ισοδυναμία για να αποδείξουμε την ισχύ μιας πρότασης. Αυτό γίνεται συνήθως ξεκινώντας από την ίδια την πρόταση (συμπέρασμα) που θέλουμε να αποδείξουμε, π.χ. μια ισότητα, και κάνοντας πράξεις, με διαδοχικές ισοδυναμίες, καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα που ισχύει και άρα ισχύει και η αρχική πρόταση.

Παράδειγμα 1.5. Έστω ότι θέλουμε να δείξουμε την ανισότητα

$$a + \beta \geqslant 2\sqrt{a\beta} \text{ για κάθε } a, \beta \geqslant 0$$

θέτουμε $a = x^2 \geqslant 0$ και $\beta = y^2 \geqslant 0$ με $x, y \in \mathbb{R}$ και ισοδύναμα έχουμε

$$x^2 + y^2 \geqslant 2\sqrt{x^2y^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 \geqslant 2|xy| \Leftrightarrow$$

$$|x|^2 + 2|xy| + |y|^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(|x| + |y|)^2 \geqslant 0$$

που είναι προφανές ότι ισχύει.

1.3 Διατήρηση ισοδυναμίας

Κατά την αποδεικτική διαδικασία, αν σε ένα βήμα δεν ισχύει και η αντίστροφη πορεία, τότε δεν ισχύει και η ισοδυναμία, οπότε η απόδειξη δε θα είναι σωστή. Έτσι πολλές φορές, καταλήγουμε σε λάθος συμπεράσματα, σε λογικές πλάνες, σε παράδοξα.

Σε ποιές όμως περιπτώσεις ΔΕ διατηρείται η ισοδυναμία;

Απάντηση:

Η ισοδυναμία ΔΕ διατηρείται όταν:[1]

[1] Βλέπε σχετικά και την παρατήρηση 1.9 στη σελ. 12.

1. Προσθέτουμε, αφαιρούμε, πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε δύο ισότητες κατά μέλη.

2. Προσθέτουμε δύο ανισότητες κατά μέλη.

3. Υψώνουμε στο τετράγωνο, και γενικότερα σε άρτιο εκθέτη, τα δύο μέλη μιας ισότητας.
   Το αντίστροφο, και άρα η ισοδυναμία, ισχύει αν ο εκθέτης είναι περιττός ή αν έχουμε εξασφαλίσει ότι τα δύο μέλη είναι ομόσημα.

4. Παραγωγίζουμε μια ισότητα.
   Αν f, g συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμες σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε ισχύει ότι αν

   $$f(x) = g(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

   αλλά το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει.

   Αυτό που ισχύει είναι το εξής:

   $$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + c \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

   όπου $c \in \mathbb{R}$ μια σταθερά.

   Το αντίστροφο, και άρα η ισοδυναμία, θα ίσχυε αν $c = 0$. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που υπάρχει $a \in \Delta$ τέτοιο ώστε $f(a) = g(a)$.

5. Ολοκληρώνουμε μια ισότητα.
   Αν f, g συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ τότε ισχύει ότι αν

   $$f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

   αλλά το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει.

Παράδειγμα 1.6. Έστω το παρακάτω σύστημα των δύο εξισώσεων με $x, y \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} x + 2 = y \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

προσθέτουμε κατα μέλη και έχουμε

$$2x + 1 = y$$

οπότε για κάθε τιμή του x έχουμε αντίστοιχα και μια τιμή του y. Άπειρα ζεύγη $(x, y) = (a, 2a + 1)$ με $a \in \mathbb{R}$. Όμως από το αρχικό σύστημα είναι δεκτό μόνο ένα ζεύγος, το $(x, y) = (1, 3)$. Βλέπουμε δηλαδή ότι δεν είναι δυνατό να επιστρέψουμε στο αρχικό σύστημα έχοντας μόνο την τελική ισότητα. Δεν ισχύει η αντιστροφή μετά την πρόσθεση των δύο σχέσεων, οπότε αν τυχόν δουλεύουμε με ισοδυναμίες, αυτό το βήμα δεν πρέπει να το κάνουμε.

Παράδειγμα 1.7. Ζητείται να λυθει η εξίσωση $\sqrt{x+3} = x + 1$ στο $\mathbb{R}$.

ΛΎΣΗ:

Απαιτούμε η υπόριζα ποσότητα να είναι θετική ή ίση με το μηδέν, έτσι ώστε η ρίζα να έχει έννοια πραγματικού αριθμού.

$$x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3$$

Εργαζόμενοι τώρα στο σύνολο $[-3, +\infty]$ υψώνουμε τα δύο μέλη της ισότητας στο τετράγωνο για να απαλλαγούμε από την τετραγωνική ρίζα.

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x + 3 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \geqslant -3 \text{ ή } x = -2 \geqslant -3$$

από τις οποίες όμως με δοκιμή στην αρχική εξίσωση, δεκτή είναι μόνο η $x = 1$, γιατί για $x = -2$ έχουμε $\sqrt{1} = -1$ που είναι αδύνατο.

Βλέπουμε έτσι, πως ο περιορισμός $x \geqslant -3$ που λάβαμε, δεν ήταν ικανός ώστε να απορρίψουμε τη δεύτερη λύση και να αποφύγουμε έτσι τις δοκιμές, οι οποίες ίσως είναι και αρκετά επίπονες - ευτυχώς εδώ όχι.

Αυτό συνέβη γιατί όταν υψώνουμε στο τετράγωνο τα δύο μέλη μιας ισότητας, δεν ισχύει η ισοδυναμία αν και τα δύο μέλη δεν είναι ομόσημα. Είναι απαραίτητο πριν το κάνουμε, να πάρουμε περιορισμούς ώστε τα δύο μέλη να είναι ομόσημα. Ετσι η τομή όλων των περιορισμών είναι το σύνολο στο οποίο πρέπει να ανήκουν οι λύσεις που θα βρούμε.

Άρα αφού στο 1ο μέλος υπάρχει ριζικό

$$\sqrt{x+3} \geqslant 0 \text{ για κάθε } x \geqslant -3$$

θα έπρεπε να είχαμε επιπλέον και

$$x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$$

οπότε η τομή τους είναι το σύνολο $[-1, \infty]$. Έτσι μπορούμε αμέσως να μη κάνουμε δεκτή τη δεύτερη λύση $x = -2$ αφού δεν ανήκει σε αυτό.

Όταν υψώνουμε στο τετράγωνο ή γενικά σε άρτιο εκθέτη τα μέλη μιας εξίσωσης, το πλήθος των λύσεων που θα βρούμε ίσως είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό.

Παράδειγμα 1.8. Ας προσπαθήσουμε να βρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - 2x \text{ με } x \in [0, 3]$$

Η συνάρτηση f, αφού είναι παραβολή με $a = 1 > 0$, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \dfrac{-\beta}{2a} = 1$ το οποίο ανήκει στο διάστημα $[0, 3]$ όπου ορίζεται το x, οπότε έχει Σ.Τ. το

$$[f(1), max\{f(0), f(3)\}] = [-1, 3]$$

Μπορούμε όμως να εργαστούμε και με συνθετικό τρόπο, "χτίζοντας" από το πεδίο ορισμού τον τύπο της συνάρτησης:

$$0 \leqslant x \leqslant 3 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 9$$

και

$$0 \leqslant x \leqslant 3 \Leftrightarrow -6 \leqslant -2x \leqslant 0$$

και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$0 - 6 \leqslant x^2 - 2x \leqslant 9 + 0$$

$$-6 \leqslant x^2 - 2x \leqslant 9$$

$$-6 \leqslant f(x) \leqslant 9$$

ΛΑΘΟΣ!
Βρήκαμε για Σ.Τ. ένα μεγαλύτερο διάστημα, το $[-6, 9]$, γιατί όταν προσθέτουμε κατά μέλη δεν ισχύει η ισοδυναμία. Δεν εξασφαλίσαμε έτσι ότι μπορούμε να επιστρέψουμε στο πεδίο ορισμού $[0, 3]$ από όπου ξεκινήσαμε. Δεν εξασφαλίσαμε την αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων. Επιλύοντας την ανίσωση

$$-6 \leqslant f(x) \leqslant 9$$

έχουμε

$$-6 \leqslant x^2 - 2x \leqslant 9 \Rightarrow$$

$$-5 \leqslant x^2 - 2x + 1 \leqslant 10 \Rightarrow$$

$$-5 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 10 \Rightarrow$$

$$|x-1| \leqslant \sqrt{10} \Rightarrow$$

$$x \in [-\sqrt{10} + 1, \sqrt{10} + 1] \neq [0, 3]$$

βλέπουμε ότι δεν καταλήγουμε στο πεδίο ορισμού της f.
Ας ξαναπροσπαθήσουμε να βρούμε το Σ.Τ. εργαζόμενοι διαφορετικά:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$

και έχουμε

$$0 \leqslant x \leqslant 3 \Leftrightarrow$$

$$-1 \leqslant x - 1 \leqslant 2 \Leftrightarrow$$

$$1 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 4 \Rightarrow$$
$$0 \leqslant (x-1)^2 - 1 \leqslant 3$$

Πάλι ΛΑΘΟΣ!
Γιατί δεν επιτρέπεται να υψώνουμε στο τετράγωνο μη ομόσημα μέλη ανίσωσης. Το σωστό θα ήταν να σπάσουμε την ανίσωση σε δύο άλλες με ομόσημα μέλη:

$$-1 \leqslant x-1 \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 1$$

ή

$$0 \leqslant x-1 \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 4$$

οπότε

$$0 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow$$
$$-1 \leqslant (x-1)^2 - 1 \leqslant 3 \Leftrightarrow$$
$$-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$$

το οποίο είναι και το αληθές.

Προσέχουμε πάντα να διατηρείται η ισοδυναμία γιατί ίσως καταλήξουμε σε υπερσύνολο του συνόλου των πραγματικών λύσεων.

Παρατήρηση 1.9. *Ειδικά, στην περίπτωση που έχουμε ανισότητες της ίδιας φοράς, ΔΕΝ επιτρέπεται να τις αφαιρέσουμε, να τις πολλαπλασιάσουμε, να τις διαιρέσουμε, να τις υψώσουμε στο τετράγωνο και γενικότερα σε άρτιο εκθέτη, να τις παραγωγίσουμε ή να τις ολοκληρώσουμε κατά μέλη, διότι ΔΕ διατηρείται κατάνάγκη η φορά της ανίσωσης.* [2] *Δηλαδή δεν ισχύει όχι μόνο η ισοδυναμία, αλλά ούτε καν η συνεπαγωγή.*

Επιτρέπεται να υψώσουμε σε άρτιο εκθέτη τα μέλη μιας ανίσωσης, μόνο αν και τα δύο μέλη είναι ομόσημα. Δηλαδή αν $a, b > 0$ τότε $a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$ ενώ αν $a, b < 0$ τότε $a < b \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}$,

[2] Για τη διαφόριση και ολοκλήρωση ανισώσεων, βλέπε το παράδειγμα 9.45 στη σελ. 157 και το παράδειγμα 10.42 στη σελ. 188.

όπου n *φυσικός αριθμός, χωρίς όμως να ισχύει το αντίστροφο. 'Ομοια, επιτρέπεται να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισώσεις, μόνο αν όλα τα μέλη είναι ομόσημα. Δηλαδή αν* $a, b, c, d > 0$ *και* $a < b$, $c < d$ *τότε* $ac < bd$ *ενώ αν* $a, b, c, d < 0$ *τότε* $ac > bd$, *χωρίς όμως να ισχύει το αντίστροφο.*

Παράδειγμα 1.10. Έστω οι δύο ανισότητες

$$\left.\begin{array}{l} 4 < 9 \\ 2 < 8 \end{array}\right\}$$

με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε

$$4 - 2 < 9 - 8 \Rightarrow 2 < 1$$

που είναι αδύνατο. Με διαίρεση κατά μέλη έχουμε

$$\frac{4}{2} < \frac{9}{8} \Rightarrow 2 < 1,125$$

το οποίο και αυτό δεν ισχύει. Επίσης, υψώνοντας στο τετράγωνο την ανίσωση $-3 < 2$ παίρνουμε $9 > 4$. Βλέπουμε έτσι ότι η φορά της ανίσωσης δε διατηρείται. Το ίδιο συμβαίνει αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις $-3 < 2$ και $-1 < 1$, οπότε έχουμε $3 > 1$.

Από τον ορισμό της συνάρτησης, για κάθε a, b που ανήκουν στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f, έχουμε σαν αποτέλεσμα την παρακάτω ισοδυναμία

$$\{a = b \Rightarrow f(a) = f(b)\} \Leftrightarrow \{f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b\}$$

Έτσι, αν η συνάρτησή μας είναι η απόλυτη τιμή, η τετραγωνική ρίζα, το συνημίτονο ή οποιοσδήποτε συνδυασμός τους με άλλες συναρτήσεις με τις τέσσερις βασικές πράξεις $+, -, /, *$ και τις πράξεις της σύνθεσης και αντιστροφής συναρτήσεων, τότε μπορούμε να έχουμε τις συνεπαγωγές

$$
\begin{aligned}
&a = b \Rightarrow |a| = |b| \\
&a = b \Rightarrow a^2 = b^2 \\
&a = b \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}, \text{ όπου } a, b \geqslant 0 \\
&a = b \Rightarrow \ln a = \ln b, \text{ όπου } a, b > 0 \\
&a = b \Rightarrow \cos a = \cos b
\end{aligned}
$$

Όμως το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, παρά μόνο στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι ένα προς ένα, γιατί τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\{a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)\} \Leftrightarrow \{f(a) = f(b) \Rightarrow a = b\}$$

οπότε από τις προηγούμενες συνεπαγωγές, η αντιστροφή ισχύει μόνο για την τετραγωνική ρίζα και τη λογαριθμική συνάρτηση οι οποίες είναι "1-1", δηλαδή θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
&a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}, \text{ όπου } a, b \geqslant 0 \\
&a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b, \text{ όπου } a, b > 0
\end{aligned}
$$

ενώ για τις άλλες, η ισοδυναμία θα ισχύει σε υποσύνολο του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση είναι "1-1".
Για παράδειγμα, το συνημίτονο είναι "1-1" σε κάθε διάστημα $[k\pi, (k+1)\pi]$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, οπότε για $k = 0$ θα έχουμε

$$a = b \Leftrightarrow \cos a = \cos b \text{ για κάθε } a, b \in [0, \pi]$$

Οι ισοδυναμίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην επίλυση εξισώσεων. Πρέπει να εργαζόμαστε πάντα με αυτές, γιατί οι συνεπαγωγές όπως είδαμε δεν αρκούν, αφού οι ρίζες της τελικής εξίσωσης πρέπει να επαληθεύουν και την αρχική εξίσωση, τη ζητούμενη από το πρόβλημα προς λύση. Άρα πρέπει ή να παίρνουμε τους περιορισμούς που απαιτούνται για να συνεχίζει να ισχύει η ισοδυναμία, ή στο τέλος να κάνουμε τις δοκιμές επαλήθευσης όλων των ριζών που θα βρούμε στην αρχική.

Η γνώση της μονοτονίας μιας συνάρτησης, μπορεί να μας βοηθήσει στην αντιμετώπιση της λύσης ανισώσεων, αφού αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε για κάθε $a, b \in \Delta$ θα ισχύει από τον ορισμό

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

αλλά και το αντίστροφο, δηλαδή

$$f(a) < f(b) \Rightarrow a < b$$

αφού αν δεχτούμε ότι ισχύει $a > b$ ή $a = b$ τότε θα έχουμε $f(a) > f(b)$ ή $f(a) = f(b)$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη δεδομένη ανίσωση $f(a) < f(b)$. Άρα θα ισχύει η ισοδυναμία

$$a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$$

Κεφάλαιο 2

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

2.1 Πως αποδεικνύω ότι ισχύει μία πρόταση

2.1.1 Ευθεία απόδειξη

Ξεκινάμε πάντα από τα δεδομένα της υπόθεσης, και σε συνδυασμό με γνωστές προτάσεις καταλήγουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα.

Παράδειγμα 2.1. Αν ισχύει $a^2 = b^2 + c^2$ όπου a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών τους τρεις αυτούς αριθμούς. [1]

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ &= (b+c)^2 - 2bc \\ &< (b+c)^2 \end{aligned}$$

και άρα $a < b + c$. Επίσης έχουμε

$$a^2 = b^2 + c^2 > b^2 \Rightarrow a > b$$

[1] Δεν πρόκειται για το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

και
$$a^2 = b^2 + c^2 > \psi^2 \Rightarrow a > c$$
οπότε, αφού το μήκος a είναι το μεγαλύτερο μήκος, και μικρότερο από το άθροισμα των άλλων δύο, από την τριγωνική ανισότητα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών a, b, c. □

Αν τα δεδομένα της υπόθεσης είναι ελάχιστα, τότε θα αναγκαστούμε να ξεκινήσουμε από το ζητούμενο προς απόδειξη, και εργαζόμενοι με ισοδυναμίες, καταλήγουμε σε κάτι που ισχύει.

Παράδειγμα 2.2. Αν $a > 0$ και $b > 0$ να δείξετε ότι ισχύει
$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geqslant 2$$

Απόδειξη.
$$\begin{aligned}(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geqslant 2 \Leftrightarrow\\ (a+b)^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow\\ a^2+b^2 \geqslant 0\end{aligned}$$
το οποίο ισχύει για κάθε $a, b > 0$. Το δεύτερο βήμα της ισοδυναμίας ισχύει γιατί πολλαπλασιάσαμε με $ab > 0$. □

2.1.2 Μαθηματική επαγωγή

Για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ ορίζεται και ο επόμενός του, ο $n+1$. Αυτό δεν ισχύει για τα σύνολα των ρητών και των πραγματικών αριθμών.

Ας διατυπώσουμε τώρα αυστηρά την Αρχή της Επαγωγής:

Αρχή της Επαγωγής :
Έστω S ένα σύνολο φυσικών αριθμών (άρα $S \subset \mathbb{N}$) το οποίο ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Ο αριθμός 1 ανήκει στο S.

2. Αν $n \in S$ τότε $n + 1 \in S$.

Τότε έχουμε $S = \mathbb{N}$, δηλαδή το σύνολο S ταυτίζεται με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Έτσι, αν εργαστούμε επαγωγικά, μπορούμε να αποδείξουμε μια ακολουθία προτάσεων $P(1), P(2), P(3), \dots$ που όλες εξαρτώνται από τους φυσικούς αριθμούς. Αν το σύνολο των προτάσεων αυτών είναι απεριόριστα μεγάλο (δηλαδή άπειρο και όχι πεπερασμένο), τότε είναι αδύνατο να επαληθεύσουμε κάθε μία πρόταση ξεχωριστά. Δε θα τελειώσουμε ποτέ.

Αν για παράδειγμα μας ζητείται να αποδείξουμε την πρόταση

$$1 + 2 + 3 + \cdots = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

θα χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική ιδιότητα, σε αντίθεση με την πρόταση

$$x^2 + 1 \geqslant 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

γιατί στο σύνολο $\mathbb{R}$ δε μπορούμε να καθορίσουμε ποιος είναι ο επόμενος κάθε πραγματικού αριθμού. Δεν ισχύει η Αρχή της Επαγωγής, όπως δεν ισχύει και η Αρχή του Ελαχίστου που επίσης ισχύει μόνο στους φυσικούς. Οι δύο αυτές Αρχές είναι ισοδύναμες.[2]

Ποιά είναι όμως η λογική της απόδειξης, η κεντρική ιδέα που την καθιστά ικανή να παράγει το προσδοκώμενο αποτέλεσμα;
Αν εφόσον ισχύει η πρόταση για το τυχαίο n συνεπάγεται η ισχύς της πρότασης και για τον επόμενο $n + 1$, και με δεδομένη την αλήθεια της πρότασης για $n = 1$, έχουμε τότε την ισχύ της πρότασης και για τον επόμενο αριθμό $n = 2$, μετά για τον επόμενο $n = 3$ και επομένως για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Πρόταση 2.3. *(Μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής)*
Έστω $P(1), P(2), P(3), \dots$ ένα σύνολο μαθηματικών προτάσεων που όλες εξαρτώνται από τους φυσικούς αριθμούς. Αν υποθέσουμε ότι:

[2]Περισσότερα βλέπε στο Παράρτημα Α΄ στη σελ. 215.

1. *Η πρόταση $P(1)$ αληθεύει.*

2. *Για κάθε $n > 1$, αν η πρόταση $P(n)$ αληθεύει, τότε και η $P(n+1)$ αληθεύει.*

Τότε η πρόταση $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n \geqslant 1$.

Απόδειξη. [3] Το σύνολο $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n)$ αληθής$\}$ περιέχει το 1 αφού η πρόταση $P(1)$ αληθεύει. Επίσης από το (β΄), αν η πρόταση $P(n)$ αληθεύει (άρα $n \in S$) τότε και η $P(n+1)$ αληθεύει (οπότε και $n+1 \in S$). Άρα το σύνολο S ικανοποιεί τις υποθέσεις της Αρχής της Επαγωγής και σύμφωνα με αυτή είναι $S = \mathbb{N}$, οπότε η μαθηματική πρόταση $P(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n. □

Παράδειγμα 2.4. Να υπολογιστεί ο αριθμός

$$x = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ το πλήθος ριζικά}}$$

Λύση:

Εδώ πρόκειται για μια ακολουθία a_n με όρους

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_2 &= \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ &\vdots \\ a_n &= \sqrt{2+a_{n-1}} \\ a_{n+1} &= \sqrt{2+a_n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

[3]Για μια διαφορετική απόδειξη χρησιμοποιώντας αντί της Αρχής της Επαγωγής, την Αρχή του Ελαχίστου (οι οποίες είναι και ισοδύναμες), βλέπε στο Παράρτημα Α΄ στη σελ. 215.

Καταρχήν θα ερευνήσουμε αν συγκλίνει ή όχι. Θα μελετήσουμε την ακολουθία ως προς τη μονοτονία της και θα εξετάσουμε αν είναι φραγμένη, για να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση που λέει πως αν μια ακολουθία είναι μονότονη και φραγμένη θα συγκλίνει.

Μονοτονία: Από τη διάταξη των όρων της $a_1 < a_2$, $a_2 < a_3$, κτλπ., φαίνεται ότι ίσως είναι γνησίως αύξουσα. Άρα θα δείξουμε επαγωγικά ότι ισχύει

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Για $n = 1$ ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $a_k < a_{k+1}$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή $a_{k+1} < a_{k+2}$.
Έχουμε

$$\begin{aligned} a_k &< a_{k+1} \Rightarrow \\ 2 + a_k &< 2 + a_{k+1} \Rightarrow \\ \sqrt{2 + a_k} &< \sqrt{2 + a_{k+1}} \Rightarrow \\ a_{k+1} &< a_{k+2} \Rightarrow \\ a_n &\nearrow \end{aligned}$$

Φράγμα: Ένα κάτω φράγμα είναι ο πρώτος όρος $a_1 = \sqrt{2}$. Επειδή $a_1 = \sqrt{2} < 2$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2$, κτλπ., ίσως ένα άνω φράγμα είναι το 2. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι ισχύει

$$a_n < 2 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Για $n = 1$ ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $a_k < 2$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή $a_{k+1} < 2$.
Έχουμε

$$\begin{aligned} a_k &< 2 \Rightarrow \\ 2 + a_k &< 4 \Rightarrow \\ \sqrt{2 + a_k} &< \sqrt{4} \Rightarrow \\ a_{k+1} &< 2 \Rightarrow \end{aligned}$$

οπότε η ακολουθία a_n είναι φραγμένη, και είναι

$$\sqrt{2} < a_n < 2$$

Σύγκλιση: Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ακολουθία a_n συγκλίνει.
Έστω $\lim a_n = \ell$.
Επομένως, θα είναι και $\lim a_{n+1} = \ell$.
Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n} \Rightarrow \\ \lim a_{n+1} &= \sqrt{\lim(2 + a_n)} \Rightarrow \\ \lim a_{n+1} &= \sqrt{2 + \lim a_n} \Rightarrow \\ \ell &= \sqrt{2 + \ell} \Rightarrow \\ \ell^2 &= \ell + 2 \end{aligned}$$

η οποία είναι η χαρακτηριστική εξίσωση της αναδρομικά ορίζόμενης ακολουθίας a_n, και έχει ρίζες $\ell_1 = -1$ και $\ell_2 = 2$. Επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί, δεκτή ρίζα είναι μόνο η δεύτερη, οπότε $\lim a_n = 2$.

Χρήση της επαγωγής στην εύρεση μονοτονίας και φράγματος αναδρομικά οριζόμενης ακολουθίας.

Γενικότερα, αν η ακολουθία ορίζεται με αναδρομική σχέση (αναγωγικό τύπο), τότε προσπαθούμε να μαντέψουμε τη μονοτονία της από την ανισοτική σχέση που ακολουθούν κάποιοι όροι της (συνήθως οι πρώτοι), και προσπαθούμε να την αποδείξουμε με τη μέθοδο της επαγωγής.

Για να βρούμε ένα φράγμα της (εκτός από τον πρώτο της όρο a_1 στην περίπτωση που είναι γνησίως μονότονη), προσπαθούμε να φράξουμε την a_n ή την $|a_n|$, ή λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση της ακολουθίας, μια ρίζα της οποίας, είναι πιθανό να είναι φράγμα, και μετά το αποδεικνύουμε επίσης επαγωγικά.

2.1.3 Απαγωγή σε άτοπο (Contradiction)

Έστω ότι θέλω να δείξω πως με δεδομένο το A έχουμε συμπέρασμα το B. Δηλαδή το A είναι ικανή συνθήκη για την ισχύ της B.

Υποθέτουμε ότι ΔΕΝ ισχύει το συμπέρασμα B, και με δεδομένο πλέον τη ΜΗ ισχύ του B - και την ισχύ του A βεβαίως - καταλήγουμε σε αντίφαση. (Άτοπο)

Παράδειγμα 2.5. Να δειχτεί ότι αν ο a είναι ακέραιος και ο a^2 είναι περιττός, τότε ο a είναι περιττός.

Απόδειξη. Έστω ότι ο a ΔΕΝ είναι περιττός, και με το δεδομένο πως είναι ακέραιος συμπεραίνουμε έτσι ότι είναι άρτιος. Επομένως και το τετράγωνό του, ο a^2 θα είναι άρτιος. Άτοπο, γιατί από την υπόθεση ο a^2 είναι περιττός. Άρα ο a είναι περιττός. □

Προσοχή όμως!

Αν ΔΕΝ χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση πως ο a είναι ακέραιος, τότε αν ο a ΔΕΝ είναι περιττός, ΔΕ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο a είναι άρτιος. Μπορεί να έιναι άρρητος. Έτσι, η πρόταση:

"Αν ο a^2 είναι περιττός, τότε ο a είναι περιττός."

ΔΕΝ ισχύει, αφού για παράδειγμα μπορεί να είναι $a^2 = 3$ και $a = \sqrt{3}$.

Παρατήρηση 2.6. *Μη συγχέουμε την απαγωγή σε άτοπο με την απόδειξη ότι ΔΕΝ ισχύει η πρόταση: $A \Rightarrow$ όχι B. Στην απαγωγή σε άτοπο, με δεδομένα το A και τη ΜΗ ισχύ του B καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε συμπεραίνουμε την ισχύ του B. Αποδεικνύουμε δηλαδή την πρόταση $A \Rightarrow B$.*

Στη δεύτερη περίπτωση προσπαθούμε να δείξουμε τη ΜΗ ισχύ της πρότασης $A \Rightarrow$ όχι B, όπου με δεδομένο μονο το A, συμπεραίνουμε ότι ΔΕΝ ισχύει η άρνηση του B. Αποδεικνύουμε δηλαδή την πρόταση $A \nRightarrow$ όχι B.

Παρατήρηση 2.7. *Η μη ισχύς της πρότασης $A \Rightarrow$ όχι B δεν είναι ισοδύναμη με την πρόταση $A \Rightarrow B$, διότι:*
Είναι πιθανό να έχουμε $A \Rightarrow \Gamma \neq B$, όπου $\Gamma \nRightarrow B$, δηλαδή η συνθήκη Γ δεν είναι ικανή για την ισχύ της B.

Παράδειγμα 2.8. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 2^n$ δεν είναι φραγμένη άνω.

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία $a_n = 2^n$ είναι φραγμένη άνω, με ένα άνω φράγμα $\partial \in \mathbb{R}$. Δηλαδή

$$0 < 2^n \leqslant \partial$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + na \quad \text{με } a > -1,\ n \in \mathbb{N}$$

για $a = 1$ έχουμε

$$(1 + 1)^n \geqslant 1 + n \cdot 1 \Rightarrow 2^n \geqslant 1 + n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Άρα

$$1 + n \leqslant 2^n \leqslant \partial \Rightarrow 1 + n \leqslant \partial$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί δεν είναι δυνατό ένας σταθερός αριθμός όπως ο ∂ να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από κάθε φυσικό αριθμό $n + 1$.
Άρα η ακολουθία a_n δεν είναι φραγμένη άνω.

Θα μπορούσαμε να το δούμε και από άλλη οπτική γωνία:
Το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι φραγμένο άνω. Όμως το σύνολο τιμών της $a_n = 2^n$ είναι υποσύνολο των φυσικών αριθμών

$$2^n = \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\} \subset \mathbb{N}$$

και άρα a_n μη φραγμένη άνω. □

2.1.4 Αντιθετοαντιστροφή (Contrapositive)

Περίπτωση 1 Δίνεται η πρόταση:

"Αν ισχύει το A τότε ισχύει το B"

Με αντιθετοαντιστροφή έχουμε την παρακάτω πρόταση:

"Αν ΔΕΝ ισχύει το B τότε ΔΕΝ ισχύει το A"

Θα δείξουμε, τώρα, πως οι δύο προηγούμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

(Ευθύ) Με δεδομένο την πρώτη πρόταση, θα δείξουμε τη δεύτερη. Έστω ότι ΔΕΝ ισχύει το B. Τότε ΔΕΝ ισχύει ούτε το A, γιατί αν ισχύει, τότε σύμφωνα με την πρώτη πρόταση θα ισχύει και το B. (Άτοπο)

(Αντίστροφο) Με δεδομένο την δεύτερη πρόταση, θα δείξουμε την πρώτη. Έστω ότι ισχύει το A. Τότε ισχύει και το B, γιατί αν ΔΕΝ ισχύει, τότε σύμφωνα με την δεύτερη πρόταση ΔΕΝ θα ισχύει ούτε το A. (Άτοπο)

Παράδειγμα 2.9. Έστω η πρόταση:

Αν χιονίζει, τότε κάνει κρύο.

Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει. Ισχύει όμως το παρακάτω με αντιθετοαντιστροφή:

Αν ΔΕΝ κάνει κρύο, τότε ΔΕ χιονίζει!

Και εδώ ΔΕΝ ισχύει το αντίστροφο.

Περίπτωση 2 Δίνεται η πρόταση:

"Αν ισχύει το A και το B τότε ισχύει το Γ"

Με αντιθετοαντιστροφή έχουμε την παρακάτω πρόταση:

"Αν ΔΕΝ ισχύει το Γ και ισχύει το B τότε ΔΕΝ ισχύει το A"

Θα δείξουμε, τώρα, πως οι δύο προηγούμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

(Ευθύ) Με δεδομένο την πρώτη πρόταση, θα δείξουμε τη δεύτερη. Έστω ότι ΔΕΝ ισχύει το Γ. Τότε ΔΕΝ ισχύει ούτε το A, γιατί αν ισχύει, και με δεδομένο την ισχύ του B, τότε σύμφωνα με την πρώτη πρόταση θα ισχύει και το Γ. (Άτοπο)

(Αντίστροφο) Με δεδομένο την δεύτερη πρόταση, θα δείξουμε την πρώτη. Έστω ότι ισχύει το A. Τότε ισχύει και το Γ, γιατί αν ΔΕΝ ισχύει, και με δεδομένο την ισχύ του B, τότε σύμφωνα με την δεύτερη πρόταση ΔΕΝ θα ισχύει ούτε το A. (Άτοπο)

Παράδειγμα 2.10. Με αντιθετοαντιστροφή από το παράδειγμα 2.5 στη σελ. 23, έχουμε:

"Αν ο a ΔΕΝ είναι περιττός ενώ ο a^2 είναι περιττός, τότε ο a ΔΕΝ είναι ακέραιος."

Αν συνεχίσουμε θα έχουμε:

"Αν ο a είναι ακέραιος αλλά όχι περιττός (άρα άρτιος) τότε ο a^2 ΔΕΝ είναι περιττός."

Χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της αντιθετοαντιστροφής είναι τα επόμενα θεωρήματα. Το θεώρημα Fermat για τα τοπικά ακρότατα και το θεώρημα ακέραιων ριζών πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές είναι από τις περιπτώσεις που δεν εφαρμόζουμε συνήθως το θεώρημα άμεσα, αλλά κυρίως έμμεσα, με την αντιθετοαντιστροφή του.

Γενικά με αυτή την πρακτική δημιουργούμε **αρνητικά κριτήρια**. Κριτήρια για τη ΜΗ ύπαρξη μαθηματικών εννοιών.

Θεώρημα 2.11 (Fermat)**.** *Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος A και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.*

Η συνήθης χρήση του όμως γίνεται με αντιθετοαντιστροφή:

Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος A και είναι $f'(x_0) \neq 0$, τότε στο x_0 ΔΕΝ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

Αποκτήσαμε έτσι ένα κριτήριο ΜΗ ύπαρξης τοπικού ακροτάτου.

Θεώρημα 2.12 (Ακέραιων Ριζών)**.** *Αν το πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές έχει ρίζα τον ακέραιο αριθμό $\rho \neq 0$, τότε ο ρ διαιρεί τον σταθερό όρο του πολυωνύμου.*

Και εδώ, όπως και προηγουμένως, έχουμε:

Αν ακέραιος αριθμός $\rho \neq 0$ ΔΕ διαιρεί τον σταθερό όρο του πολυωνύμου $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές, τότε ο ρ ΔΕΝ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

Έτσι έχουμε ένα σημαντικό κριτήριο για να αποφασίσουμε αν ένας ακέραιος είναι ή όχι ρίζα ενός πολυωνύμου.

2.1.5 Κατασκευαστική απόδειξη

Με αυτή τη μέθοδο απόδειξης, δίνεται κατ' ευθείαν ένα συγκεκριμμένο παράδειγμα ή μια συγκεκριμμένη διαδικασία (αλγόριθμος), με την οποία παράγεται το ζητούμενο παράδειγμα.

Χαρακτηριστική περίπτωση τέτοιας απόδειξης, είναι η κατασκευή του αριθμού Liouville ή αλλιώς σταθερά του Liouville από τον Joseph Liouville. Ήταν ο πρώτος δεκαδικός αριθμός που αποδείχτηκε [4] ότι ήταν υπερβατικός.

Η σταθερά του Liouville, είναι ένας δεκαδικός αριθμός που έχει το 1 σε κάθε δεκαδική θέση που αντιστοιχεί στο $n!$, δηλαδή στις δεκαδικές

[4] Αποδείχτηκε από τον Liouville το 1850.

θέσεις $1, 2, 6, 24, 120, \ldots$, και 0 παντού αλλού.

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0,110001000000000000000001000\ldots$$

Παράδειγμα 2.13. Να δειχτεί ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί a και b τέτοιοι ώστε $a^b \in \mathbb{Q}$.

Απόδειξη. Ο αριθμός $e^{\ln 2}$ ισούται με 2, που είναι ρητός, ενώ e και $\ln 2$ είναι άρρητοι. □

2.1.6 Υπαρξιακή απόδειξη

Κάποιες φορές αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας μαθηματικής οντότητας χωρίς κατασκευή, γιατί μπορεί να είναι πολύ δύσκολο και η απόδειξη πολύ μακροσκελής. Χρησιμοποιούμε τα λεγόμενα "υπαρξιακά θεωρήματα" όπως το Θ. Ενδιάμεσων Τιμών, Θ.Μ.Τ., Θ. Bolzano, κτλπ, τα οποία τα καταφέρνουν πολύ καλά κάτω από "άσχημες" συνθήκες.

Παράδειγμα 2.14. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι περιττή και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $lim_{x\to 0}\,[f(\cos x)] = 2$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1$.

Απόδειξη. Εδώ δε γνωρίζουμε καν τον τύπο της συνάρτησης f, αλλά με τη βοήθεια του Θ.Bolzano θα αποδείξουμε το ζητούμενο. Θα το εφαρμόσουμε για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 1$ στο διάστημα $[0, 1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και είναι

$$g(0)\cdot g(1) = [f(0) - 1]\,[f(1) - 1] = [0 - 1][2 - 1] = -1 < 0$$

γιατί κατά πρώτο λόγο η f είναι περιττή δηλαδή $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα για $x = 0$ είναι $f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ και κατά δεύτερο λόγο, από υπόθεση έχουμε $lim_{x\to 0}\,[f(\cos x)] = 2$ που είναι ισοδύναμο με $f(1) = 2$ αφού η συνάρτηση $f(\cos x)$ είναι συνεχής σαν σύνθεση συνεχών. Άρα από το Θ.Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = 1$. □

2.1.7 Μη κατασκευαστική απόδειξη

Ας δούμε ξανά το παράδειγμα 2.13 στη σελίδα 28, αποδεικνύοντάς το με μια απόδειξη που λέγεται “μη κατασκευαστική”.
Παράδειγμα Να δειχτεί ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί a και b τέτοιοι ώστε $a^b \in \mathbb{Q}$.

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Τότε ο αριθμός $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι είτε ρητός είτε άρρητος.

1η περίπτωση: Ο αριθμός $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι ρητός.
Το ζητούμενο αποδείχθηκε με $a = b = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2η περίπτωση: Ο αριθμός $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι άρρητος.
Τότε με $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ και $b = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ έχουμε

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2$$

ο οποίος είναι ρητός και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

□

Αυτή η απόδειξη είναι μη κατασκευαστική, γιατί δεν κατασκευάζεται ένα παράδειγμα με συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών a και b. Στηρίζεται στον ισχυρισμό “. . . είναι είτε ρητός είτε άρρητος.”, δίνοντας με αυτόν τον τρόπο δύο διαφορετικές επιλογές για τον αριθμό $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ και δείχνει ότι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Δε μας λέει όμως ποιά από τις δύο περιπτώσεις είναι η ισχύουσα. [5]

[5] Ο αριθμός $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι όχι μόνο άρρητος, αλλά και υπερβατικός, το οποίο προκύπτει από το θεώρημα Gelfond - Schneider: Αν a και b αλγεβρικοί αριθμοί, όπου $a \neq 0, 1$ και b άρρητος (irrational), τότε a^b υπερβατικός (trancendental).

2.2 Πως αρνούμαι μία πρόταση

Είναι σημαντικό να βρίσκουμε την αντίθετη έννοια ή πιο σωστά τη συμπληρωματική.
Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει την άρνηση χρήσιμων συμβόλων - εννοιών.

Σύμβολο	Άρνηση	Σύμβολο	Άρνηση
$=$	$\neq$	$\exists$	$\nexists$
$\neq$	$=$	$\nexists$	$\exists$
$\geqslant$	$<$	$\in$	$\notin$
$<$	$\geqslant$	$\notin$	$\in$
$\cup$	$\cap$	ή	και
$\cap$	$\cup$	και	ή
$\forall$	$\exists$	$\exists$	$\forall$

Παράδειγμα 2.15. Για κάθε στοιχείο x που ανήκει στο σύνολο A ισχύει η ιδιότητα P.

$$\forall x \in A \Rightarrow P$$

Η άρνηση της παραπάνω πρότασης είναι η εξής:

Υπάρχει x που ανήκει στο σύνολο A για το οποίο ΔΕΝ ισχύει η ιδιότητα P.

$$\exists x \in A \Rightarrow \text{όχι } P$$

Παράδειγμα 2.16. Υπάρχει x που ανήκει στο σύνολο A για το οποίο ισχύει η ιδιότητα P.

$$\exists x \in A \Rightarrow P$$

Η άρνηση της παραπάνω πρότασης είναι η εξής:

ΔΕΝ υπάρχει x που να ανήκει στο σύνολο A για το οποίο ισχύει η ιδιότητα P.

$$\nexists x \in A \Rightarrow P$$

Ισοδύναμη έκφραση είναι η εξής:

Για κάθε στοιχείο x που ανήκει στο σύνολο A ΔΕΝ ισχύει η ιδιότητα P.

$$\forall x \in A \Rightarrow \text{όχι } P$$

Δηλαδή είναι:

$$\{\nexists x \in A \Rightarrow P\} \Leftrightarrow \{\forall x \in A \Rightarrow \text{όχι } P\}$$

Παράδειγμα 2.17. ΔΕΝ υπάρχει x που να ανήκει στο σύνολο A για το οποίο ισχύει η ιδιότητα P.

$$\nexists x \in A \Rightarrow P$$

Η άρνηση της παραπάνω πρότασης είναι η εξής:

Υπάρχει x που ανήκει στο σύνολο A για το οποίο ισχύει η ιδιότητα P.

$$\exists x \in A \Rightarrow P$$

Παρατήρηση 2.18. *Κατά τη διαδικασία της μετατροπής μιας πρότασης στην άρνηση αυτής, στην αντίθετή της, όταν αλλάζουμε τη λέξη "για κάθε" με τη λέξη 'υπάρχει" και αντίστροφα, αρνούμαστε και το δεύτερο όρο της συνεπαγωγής.*

Επίσης οι εκφράσεις $\nexists x \in A \Rightarrow P$, $\forall x \in A \Rightarrow$ όχι P που όπως είδαμε είναι ισοδύναμες, δεν αποτελούν ολική άρνηση της πρότασης $\forall x \in A \Rightarrow P$ αλλά μερική άρνηση αυτής. Και αυτό γιατί απαιτούμε για όλα τα $x \in A$ να μην ισχύει η ιδιότητα P (ή αλλιώς να μην υπάρχει κανένα $x \in A$ για το οποίο να ισχύει η ιδιότητα P). Είναι όμως αρκετό να υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in A$ για το οποίο να μην ισχύει η ιδιότητα P, ώστε να "σπάσει" η καθολικότητα της ισχύος του "για κάθε", "για όλα".

Παρόμοια είναι και η βάση της λογικής με την οποία χρησιμοποιούμε το αντιπαράδειγμα για να δείξουμε ότι ΔΕΝ ισχύει μια πρόταση. (Βλέπε σχετικά στη σελ. 40)

Παράδειγμα 2.19. Έστω δύο συναρτήσεις f και g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \cdot g(x) = 0$. Έχουμε δηλαδή ότι

$$\{\forall x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } (f(x) = 0 \text{ ή } g(x) = 0)\}$$

Θα ήταν λάθος όμως να βγάλουμε σαν συμπέρασμα ότι

$$\{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\} \text{ ή } \{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0\}$$

αφού για παράδειγμα, αν

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

τότε αυτό είναι προφανές ότι δεν αληθεύει.

Γενικά ισχύει ότι

$$\{\forall x, \text{ ισχύει } P\} \text{ ή } \{\forall x, \text{ ισχύει } Q\} \Rightarrow \{\forall x, \text{ ισχύει } (P \text{ ή } Q)\}$$

Όπως είδαμε όμως, το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.
Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \{\exists x : \text{ να ισχύει } (P \text{ και } Q)\} \Rightarrow \\ \{\exists x : \text{ να ισχύει } P\} \text{ και } \{\exists x : \text{ να ισχύει } Q\} \end{aligned}$$

χωρίς πάλι να ισχύει το αντίστροφο.
Οι ισοδυναμίες ισχύουν στις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

$$\{\forall x, \text{ ισχύει } (P \text{ και } Q)\} \Leftrightarrow \{\forall x, \text{ ισχύει } P\} \text{ και } \{\forall x, \text{ ισχύει } Q\}$$

και

$$\begin{aligned} \{\exists x : \text{ να ισχύει } (P \text{ ή } Q)\} \Leftrightarrow \\ \{\exists x : \text{ να ισχύει } P\} \text{ ή } \{\exists x : \text{ να ισχύει } Q\} \end{aligned}$$

2.2.1 Παραδείγματα άρνησης ορισμών

Ορισμός 2.20. *[Άνω φραγμένο συνόλο]*
Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένο άνω, αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$, υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \leqslant M$.[6]

[6] Το M λέγεται άνω φράγμα του A. Αν $M \in A$ τότε το M είναι το μέγιστο (maximum) στοιχείο του A.

Άρνηση

Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ ΔΕΝ είναι φραγμένο άνω, αν για κάθε $M \in \mathbb{R}$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x > M$.[7]

Ορισμός 2.21. *[Άνω πέρας συνόλου]*[8]

Το $s \in \mathbb{R}$ είναι το άνω περας του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ και συμβολίζεται $supA$ αν και μόνο αν

1. Για κάθε $x \in A \Rightarrow x \leqslant s$. (Το s είναι άνω φράγμα.)
   και

2. Για κάθε $s' \in \mathbb{R}$, με $s' \geqslant x$ για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $s \leqslant s'$. (Κάθε άλλο άνω φράγμα s' είναι μεγαλύτερο από το s.)

Με άλλα λόγια:
$supA = s \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν το s είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A.

Άρνηση

Το $s \in \mathbb{R}$ ΔΕΝ είναι $supA$ αν

1. Υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x > s$. (Το s ΔΕΝ είναι άνω φράγμα.)
   ή

2. Υπάρχει $s' \in \mathbb{R}$, με $s' \geqslant x$ για κάθε $x \in A$ τέτοιο ώστε $s' < s$. (Υπάρχει άνω φράγμα s' που είναι μικρότερο από το άνω φράγμα s.)

Ορισμός 2.22. *[Σύγκλιση ακολουθίας]*

Η ακολουθία a_n συγκλίνει στον αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$ και συμβολίζουμε $a_n \to \ell$ αν και μόνο αν, για κάθε περιοχή του ℓ, οσοδήποτε μικρή, υπάρχει όρος a_{n_0} της ακολουθίας, τέτοιος ώστε, όλοι οι επόμενοι όροι της να ανήκουν σε αυτή την περιοχή.

$$\{a_n \to \ell\} \Leftrightarrow$$
$$\{\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ |a_n - \ell| < \epsilon,\ \forall n \geqslant n_0,\ n \in \mathbb{N}\}$$

[7] Το A είναι της μορφής $(x, +\infty)$ ή $[x, +\infty)$ ή $(-\infty, +\infty)$. Το A ΔΕΝ είναι φραγμένο άνω αν και μόνο αν ΔΕΝ έχει άνω φράγμα.

[8] Supremum

Παρατήρηση 2.23. *Κάθε περιοχή $(\ell-\epsilon,\ell+\epsilon)$,οσοδήποτε μικρή, περιέχει άπειρο πλήθος όρων της ακολουθίας a_n.*
(Είναι όλοι οι όροι με $n>n_0$)

$$\{a_n \to \ell\} \Leftrightarrow$$
$$\{\forall \epsilon > 0,\ \exists \text{ άπειρο πλήθος όρων της } a_n \text{ ώστε } |a_n-\ell|<\epsilon\}$$

Εκτός της περιοχής $(\ell-\epsilon,\ell+\epsilon)$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος όρων της a_n. Το πλήθος αυτό εξαρτάται από το ϵ.

Άρνηση

Η ακολουθία a_n ΔΕ συγκλίνει στον αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$ και συμβολίζουμε $a_n \nrightarrow \ell$, αν και μόνο αν υπάρχει περιοχή του ℓ τέτοια ώστε για κάθε όρο της ακολουθίας, να υπάρχει κάποιος όρος μετά από αυτόν εκτός της περιοχής.

$$\{a_n \nrightarrow \ell\} \Leftrightarrow$$
$$\{\exists \epsilon > 0 \ :\ \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant m,\ |a_n-\ell| \geqslant \epsilon\}$$

Παρατήρηση 2.24. *Υπάρχει περιοχή $(\ell-\epsilon,\ell+\epsilon)$ εκτός της οποίας βρίσκεται άπειρο πλήθος όρων της a_n.*

$$\{a_n \nrightarrow \ell\} \Leftrightarrow$$
$$\{\exists \epsilon > 0 \ :\ \text{ άπειρο πλήθος όρων ικανοποιεί την } |a_n-\ell| \geqslant \epsilon\}$$

Στην περιοχή $(\ell-\epsilon,\ell+\epsilon)$ ανήκει πεπερασμένο πλήθος όρων της a_n.

Ορισμός 2.25. *[Συνέχεια συνάρτησης]*

$1^{ος}$ Η συνάρτηση $f(x): A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε περιοχή του $f(x_0)$, οσοδήποτε μικρή, υπάρχει περιοχή του x_0 με στοιχεία x του A, για τα οποία οι τιμές $f(x)$ ανήκουν στην περιοχή του $f(x_0)$.

$$\{f(x): A \to \mathbb{R} \text{ συνεχής στο } x_0 \in A\} \Leftrightarrow$$
$$\{\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ :\ \forall x \in A \text{ με } |x-x_0| < \delta \Rightarrow$$
$$|f(x)-f(x_0)| < \epsilon\}$$

ή αλλιώς

$$\{\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ f\left[(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A\right] \subseteq (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)\}$$

2$^{\text{ος}}$ Η συνάρτηση $f(x) : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία x_n στοιχείων του A που συγκλίνει στο x_0, και η ακολουθία $f(x_n)$ συγκλίνει στο $f(x_0)$.

$$\{f(x) : A \to \mathbb{R} \text{ συνεχής στο } x_0 \in A\} \Leftrightarrow \{\forall x_n \in A \text{ με } x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)\}$$

Άρνηση

Η συνάρτηση $f(x) : A \to \mathbb{R}$ είναι ΑΣΥΝΕΧΗΣ στο $x_0 \in A$, αν και μόνο αν:

1. Υπάρχει περιοχή του $f(x_0)$, ώστε σε κάθε περιοχή του x_0 να υπάρχει $x \in A$ του οποίου η τιμή $f(x)$ να μην ανήκει στην περιοχή του $f(x_0)$.

$$\{f(x) : A \to \mathbb{R} \text{ ΑΣΥΝΕΧΗΣ στο } x_0 \in A\} \Leftrightarrow \{\exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0\ :\ \exists x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geqslant \epsilon\}$$

2. Υπάρχει ακολουθία x_n στοιχείων του A που συγκλίνει στο x_0, αλλά η ακολουθία $f(x_n)$ ΔΕ συγκλίνει στο $f(x_0)$.

$$\{f(x) : A \to \mathbb{R} \text{ ΑΣΥΝΕΧΗΣ στο } x_0 \in A\} \Leftrightarrow \{\exists x_n \in A \text{ με } x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \nrightarrow f(x_0)\}$$

Ορισμός 2.26. *[Σημείο συσσώρευσης]*

1$^{\text{ος}}$ Το $x_0 \in \mathbb{R}$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του $A \subseteq \mathbb{R}$, αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ περιέχει 1 τουλάχιστον στοιχείο του A.[9]

$$\{\text{Το } x_0 \text{ είναι σ.σ. του } A\} \Leftrightarrow$$
$$\{\forall \delta > 0,\ \exists x \in A\ :\ 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

$2^{ος}$ Το $x_0 \in \mathbb{R}$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του $A \subseteq \mathbb{R}$, αν και μόνο αν το σύνολο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ είναι άπειρο για κάθε $\delta > 0$.[10]

$$\{\text{Το } x_0 \text{ είναι σ.σ. του } A\} \Leftrightarrow$$
$$\{\forall \delta > 0,\ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset\}$$

$3^{ος}$ Το $x_0 \in \mathbb{R}$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του $A \subseteq \mathbb{R}$, όταν υπάρχει ακολουθία (x_n), με όρους διαφορετικούς ανά δύο, στοιχείων του A, με $x_n \neq x_0$, τέτοια ώστε $x_n \to x_0$.

$$\{\text{Το } x_0 \text{ είναι σ.σ. του } A\} \Leftrightarrow$$
$$\{\exists (x_n) \in A,\ x_n \neq x_0\ :\ x_n \to x_0\}$$

Άρνηση

Το x_0 ΔΕΝ[11] είναι σ.σ. του συνόλου A αν και μόνο αν:

1. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το σύνολο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ να μην περιέχει κανένα στοιχείο του συνόλου A. (Δηλαδή αρκεί να βρω μια περιοχή του x_0 στην οποία να μην ανήκει κανένα στοιχείο του A εκτός απο το x_0.)

$$\{\text{Το } x_0 \text{ είναι μεμωνομένο σημείο του } A\} \Leftrightarrow$$
$$\{\exists \delta > 0\ :\ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A = \{x_0\}\}$$

ή αλλιώς

[9] Το x_0 μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο A.

[10] Αφού περιέχει 1 τουλάχιστον στοιχείο, θα περιέχει άπειρα στοιχεία. Και αυτό γιατί αν παίρνουμε ολοένα και μικρότερες τιμές του δ, άπειρες φορές, θα έχουμε άπειρα τέτοια σύνολα με 1 τουλάχιστον x_0 σε κάθενα από αυτά.

[11] Αν το x_0 δεν είναι σ.σ. του συνόλου A τότε είναι μεμονωμένο σημείο του A.

2. Για κάθε ακολουθία (x_n) στοιχείων του A με $x_n \neq x_0$, ισχύει ότι $x_n \nrightarrow x_0$.

Ορισμός 2.27. *[Όριο συνάρτησης]*

$1^{ος}$ Το όριο της συνάρτησης $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι $\ell \in \mathbb{R}$ και συμβολίζουμε $lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν:

- το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f **και**
- για κάθε περιοχή του ℓ οσοδήποτε μικρή, υπάρχει περιοχή του x_0 αρκετά μικρή, τέτοια ώστε, για κάθε x του πεδίου ορισμού της f που ανήκει σε αυτή την περιοχή, οι τιμές της $f(x)$ να ανήκουν στην περιοχή του ℓ.

$$\{\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x \in D_f \\ \text{με } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon\}$$

$2^{ος}$ Το όριο της συνάρτησης $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι $\ell \in \mathbb{R}$ και συμβολίζουμε $lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν:

- Το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f **και**
- Για κάθε ακολουθία x_n σημείων του πεδίου ορισμού της $f(x)$, με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$, είναι $f(x_n) \to \ell$.

Άρνηση

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A.

1. Το $\ell \in \mathbb{R}$ ΔΕΝ είναι όριο της συνάρτησης $f(x)$ καθώς το x τείνει στο x_0, αν και μόνο αν:

- Υπάρχει περιοχή του ℓ, ώστε για κάθε περιοχή του x_0, να υπάρχει x του πεδίου ορισμού της f που ανήκει σε αυτή την περιοχή, με την τιμή του $f(x)$ να μην ανήκει στην περιοχή του ℓ.

$$\{\exists \epsilon > 0 \ : \ \forall \delta > 0, \ \exists x \in A \\ \text{με } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ και } |f(x) - \ell| \geqslant \epsilon\}$$

ή

- Υπάρχει ακολουθία x_n σημείων του πεδίου ορισμού της $f(x)$, με $x_n \neq x_0$ ώστε $x_n \to x_0$ και $f(x_n) \nrightarrow \ell$.

2. Το όριο της συνάρτησης $f(x)$ ΔΕΝ υπάρχει, καθώς το x τείνει στο x_0, αν και μόνο αν:

    - Υπάρχει ακολουθία x_n σημείων του πεδίου ορισμού της $f(x)$, με $x_n \neq x_0$ ώστε $x_n \to x_0$ και $f(x_n)$ να ΜΗΝ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

    ή

    - Υπάρχουν δύο ακολουθίες a_n, b_n σημείων του πεδίου ορισμού της $f(x)$, με $a_n \neq b_n$ και $a_n \to x_0, \ b_n \to x_0$ ώστε $f(a_n) \to \ell, f(b_n) \to m$ και $\ell \neq m$.

2.3 Πως αποδεικνύω ότι ΔΕΝ ισχύει μία πρόταση

2.3.1 Εξάντληση όλων των ενδεχομένων

Εξαντλώντας όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μπορούμε να έχουμε, δείχνοντας ότι καμμία από αυτές δεν είναι ικανή για την ισχύ της πρότασης.

Παράδειγμα 2.28. Για να αποδείξουμε ότι ένας φυσικός $n > 1$ δεν είναι σύνθετος (δηλαδή ότι είναι πρώτος), δείχνουμε ότι δεν έχει πρώτο διαιρέτη p με $p \leqslant \sqrt{n}$. Έτσι ο αριθμός 401 δεν είναι σύνθετος, αφού $20 < \sqrt{401} < 21$ και κανένας από τους πρώτους που είναι μικρότεροι από το 20 δε διαιρεί το 401.

Παράδειγμα 2.29. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x^n + 3x + 2 = 0$ με n περιττό φυσικό, δεν έχει ρίζα στο σύνολο των ακεραίων.

Απόδειξη. Από το θεώρημα των ακεραίων ριζών, προκύπτει πως αν η εξίσωση έχει ακέραια ρίζα τότε αυτή θα είναι διαίρετης του σταθερού όρου, που είναι ίσος με 2. Άρα εξετάζουμε τις δυνατές περιπτώσεις που είναι $\pm 1, \pm 2$, και συμπεραίνουμε ότι κανένας από αυτούς τους αριθμούς δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, αφού

$$\begin{aligned} 1^n + 3 \cdot 1 + 2 &= 6 > 0 \\ 2^n + 3 \cdot 2 + 2 &= 2^n + 8 > 0 \\ (-1)^n + 3 \cdot (-1) + 2 &= -1 - 3 + 2 = -2 < 0 \\ (-2)^n + 3 \cdot (-2) + 2 &= -2^n - 4 < 0 \end{aligned}$$

οπότε η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη στο σύνολο των ακεραίων για κάθε θετική περιττή τιμή του n. □

2.3.2 Απαγωγή σε άτοπο

Παράδειγμα 2.30. Να δειχτεί ότι ο αριθμός $\log k$ με $k > 1$ περιττό φυσικό, δεν είναι ρητός.

Απόδειξη. Έστω ότι ο αριθμός $\log k$ είναι ρητός, δηλαδή υπάρχουν m, n φυσικοί τέτοιοι ώστε $\log k = \dfrac{m}{n}$. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned} \log k = \frac{m}{n} &\Leftrightarrow \\ 10^{\log k} = 10^{\frac{m}{n}} &\Leftrightarrow \\ k = 10^{\frac{m}{n}} &\Leftrightarrow \\ k^n = 10^m &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο, γιατί ένας περιττός, ο k^n, δε μπορεί να είναι ίσος με ένα άρτιο, τον 10^m. Άρα ο αριθμός $\log k$ όπου $k > 1$ περιττός φυσικός, είναι άρρητος. $\square$

2.3.3 Αρνητικό κριτήριο

[12]

Παράδειγμα 2.31. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + x^2$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Απόδειξη. Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ με

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + 2x$$

και είναι

$$\begin{aligned} \frac{1 - \ln x}{x^2} + 2x &= 0 \\ 1 - \ln x + 2x^3 &= 0 \\ 1 + 2x^3 &= \ln x \end{aligned}$$

όμως $\ln x < x < 1 + 2x^3$ για κάθε $x > 0$, και άρα $f'(x) > 0$, οπότε η συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει τοπικά ακρότα. $\square$

2.3.4 Αντιπαράδειγμα.

Αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα, τέτοιο ώστε, με την υπάρχουσα υπόθεση να μην ισχύει το συμπέρασμα της πρότασης, για να καταρρίψουμε την καθολικότητα της ισχύος της. Έστω και αν έχει επαληθευτεί με χιλιάδες παραδείγματα. ΔΕΝ ΑΡΚΟΥΝ.

[12] Βλέπε σχετικά και στη σελ. 26

Παράδειγμα 2.32 (Πολυώνυμα παραγωγής πρώτων αριθμών). Ο Euler [5] το 1772, βρήκε ένα πολυώνυμο [13]-γεννήτρια παραγωγής πρώτων αριθμών. Το πολυώνυμο

$$f(x) = x^2 + x + 41 \tag{2.1}$$

για $x = 0, 1, 2, \ldots 39$ δίνει τιμές που είναι πρώτοι αριθμοί. Κάποιος μπορεί να ισχυριστεί ότι μέσω αυτού του πολυωνύμου θα βρούμε όλους τους πρώτους αριθμούς!

Αντιπαράδειγμα: Για $x = 40$ έχουμε $f(40) = 1681 = 41^2$ που είναι σύνθετος. Άρα απορρίπτεται ο προηγούμενος ισχυρισμός. Σκεφτείτε τώρα τι δύσκολο θα ήταν να βρεθεί αντιπαράδειγμα, αν το πλήθος των τιμών του x για τους οποίους θα είχαμε πρώτους, ήταν τεράστιο. Σε αυτή την περίπτωση φαίνεται η αξία αλλά και η αναγκαιότητα της μαθηματικής λογικής και απόδειξης. Χαρακτηριστική τέτοια περίπτωση είναι η υπόθεση Riemann, που λέει ότι οι μη τετριμμένες ρίζες ρ της συνάρτησης ζήτα [14] του Riemann, έχουν όλες πραγματικό μέρος $\frac{1}{2}$. Έχουν βρεθεί με τη βοήθεια υπολογιστή, δισεκατομμύρια ρίζες, το πραγματικό μέρος όλων όμως βρίσκεται στην ευθεία $x = \frac{1}{2}$. Αν βρεθεί έστω και μία ρίζα με $Re(\rho) \neq \frac{1}{2}$ τότε η υπόθεση Riemann θα έχει αποδειχτεί ότι δεν ισχύει.

Παράδειγμα 2.33 (Πυθαγόρειες τριάδες). Πυθαγόρεια τριάδα αριθμών ονομάζεται μια τριάδα φυσικών αριθμών a, b, c που ικανοποιούν την εξίσωση

$$a^2 + b^2 = c^2$$

[13] Ένα αντίστοιχο πολυώνυμο που οφείλεται στον Legendre το 1798, είναι το $f(x) = x^2 - x + 41$, το οποίο δίνει τους ίδιους 40 πρώτους με αυτό του Euler, για $x = 1, 2, \ldots 40$. Υπάρχουν και πολλά άλλα, όχι μόνο 2ου βαθμού, τα οποία παράγουν μεγαλύτερο πλήθος πρώτων, αλλά έχει αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει μη σταθερό πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές που να παράγει πρωτους αριθμούς για κάθε ακέραια τιμή του x.

[14] Για $z \in \mathbb{C}$ με $Re(z) > 1$, ορίζεται ως συνάρτηση ζήτα του Riemann η αναλυτική συνάρτηση $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$.

Είναι δηλαδή ακέραια μήκη πλευρών ορθογώνιου τριγώνου. Ο τύπος

$$(m^2+1)^2 = (m^2-1)+(2m)^2 \quad \text{με} \quad m \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

μας παρέχει άπειρες τριάδες π.χ.

$$\begin{aligned} \text{για } m &= 2 \to (3,4,5) \\ \text{για } m &= 3 \to (6,8,10) \\ \text{για } m &= 4 \to (8,15,17) \end{aligned}$$

Διαφορετικές τιμές του m, δίνουν και διαφορετικές τριάδες. Όμως ΔΕ μας παράγει ΌΛΕΣ τις τριάδες, γιατί:
Αντιπαράδειγμα: Η πυθαγόρεια τριάδα $(7,24,25)$ ΔΕ μπορεί να προκύψει από τον τύπο 2.2, αφού οι αριθμοί m^2-1 και m^2+1 διαφέρουν κατά 2, ενώ οι αριθμοί 24 και 25 διαφέρουν κατά 1.
Μια πλήρης λύση: Αν $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ και $c = u^2 + v^2$ όπου $u, v \in \mathbb{N}$ σχετικά πρώτοι μεταξύ τους με $u > v$ και $u - v$ να είναι περιττός, τότε $a, b, c \in \mathbb{N}$ ώστε $a^2 + y^2 = c^2$. Όλες οι τριάδες που παράγονται έχουν Μ.Κ.Δ.$(a, b, c) = 1$ και λέγονται πρωταρχικές (οι αριθμοί a, b, c είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους). [15]

Παράδειγμα 2.34 (Μικρή πλάνη του Fermat)**.** Ο Fermat ισχυρίστηκε το 1640, ότι όλοι οι αριθμοί της μορφής $2^{2^n}+1$, όπου $n \in \mathbb{N}$, είναι πρώτοι. Αυτό είναι σωστό για $n = 0, 1, 2, 3, 4$ αλλά όπως απέδειξε το 1732 ο Euler, για $n = 5$, ο αριθμός $2^{2^5}+1 = \text{πολ}641$ είναι σύνθετος. [16]

Πως πρέπει να είναι ένα αντιπαράδειγμα;
Έστω ότι θέλω να δείξω ότι ΔΕΝ ισχύει η πρόταση:

[15] Έτσι παράγονται όλες οι τριάδες αφού ισχύει ότι αν η τριάδα (a, b, c) είναι πυθαγόρεια, τότε και η (ka, kb, kc) με $k \in \mathbb{N}$ θα είναι πυθαγόρεια.

[16] Είναι $2^{2^5}+1 = 4.294.967.297 = 6.700.417 * 641$. Έχει αποδειχθεί, ότι πολλοί από τους αριθμούς της μορφής $2^{2^n}+1$ (αριθμοί του Fermat) είναι σύνθετοι, ενώ είναι ακόμα ανοιχτό το πρόβλημα για το αν υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αυτής της μορφής.

"Αν ισχύει η συνθήκη Α τότε συνεπάγεται η συνθήκη Β"

Αρκεί να βρω ένα παράδειγμα, τέτοιο ώστε να ισχύει η συνθήκη Α αλλά να ΜΗΝ ισχύει η συνθήκη Β.

Παρατήρηση 2.35. *Η έκφραση "να ΜΗΝ ισχύει η συνθήκη Β", δε σημαίνει ότι οπωσδήποτε θα πρέπει να ισχύει η αντίθετη - συμπληρωματική έννοια της Β. Αρκεί να ισχύει μια συνθήκη Γ, διάφορη της Β, ή καλύτερα μια συνθήκη Γ, μη ικανή για την ισχύ της Β ($\Gamma \nRightarrow B$).*

Παρατήρηση 2.36. *Η ύπαρξη ενός αντιπαραδείγματος ΔΕΝ είναι ικανή για την ισχύ της πρότασης:*

"Αν ισχύει η συνθήκη Α τότε συνεπάγεται η άρνηση του Β"

ή αλλιώς

"Αν ισχύει η συνθήκη Α τότε ΔΕ συνεπάγεται η συνθήκη Β"

Το αντιπαράδειγμα είναι ικανό για την απόδειξη της ΜΗ ισχύος μιας πρότασης, αλλά ΜΗ ικανό - μόνο αναγκαίο - για την απόδειξη της ισχύος μιας πρότασης. Με ένα παράδειγμα ΔΕΝ αποδεικνύω μια πρόταση. Τότε δε θα χρειαζόμασταν επίπονες και μακροσκελείς αποδείξεις!
Και αυτό γιατί:
Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση:

"Αν ισχύει η συνθήκη Α τότε συνεπάγεται η συνθήκη Β"

και υπάρχει ένα παράδειγμα όπου ισχύουν οι συνθήκες Α και Β. Η ταυτόγχρονη όμως ισχύς των Α και Β, ΔΕ σημαινει ότι είναι και καθολική, ότι ισχύουν δηλαδή πάντα, σε κάθε περίπτωση. Ακόμα και αν η ισχύς τους είναι καθολική, δε γνωρίζουμε αν η συνθήκη Α είναι ικανή για την ισχύ της συνθήκης Β. Μπορεί να συμβαίνει και το αντίστροφο, δηλαδή $B \Rightarrow A$. Είναι βέβαια πιθανό να είναι ισοδύναμες, $A \Leftrightarrow B$, αλλά αυτό αποτελεί μία μόνο περίπτωση.

Κεφάλαιο 3

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΑΝΤΙΘΕΤΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό, δίνεται μια βασική μεθοδολογία για την απόδειξη της άρνησης βασικών εννοιών, για την απόδειξη της ΜΗ ισχύος μιας συνθήκης. Δηλαδή, ότι ΔΕΝ έχει ρίζα, ότι ΔΕΝ είναι μονότονη, κτλπ., χρησιμοποιώντας την προαναφερόμενη θεωρία, και κατά κύριο λόγο την αντιθετοαντιστροφή γνωστών προτάσεων.

3.1 Ακολουθίες

1. **Μια ακολουθία a_n ΔΕ συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R}$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Υπάρχει υπακολουθία της που συγκλίνει στο $m \neq \ell$. [1]

   (β΄) $lim \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \neq \ell$
   (Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης Cauchy: Αν $\lim a_n = \ell \in \mathbb{R}$ τότε $lim \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} = \ell$)

   (γ΄) Αποκλίνει.

   (δ΄) Είναι φραγμένη από 2 ακολουθίες που συγκλίνουν στο m με $m \neq \ell$. [2]

[1] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 6.50 στη σελ. 95

[2] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 6.38 στη σελ. 93

2. **Μια ακολουθία ΔΕ συγκλίνει (αποκλίνει) αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) ΔΕΝ είναι βασική. [3]

   (β΄) ΔΕΝ είναι φραγμένη. [4]

   (γ΄) Υπάρχει μια τουλάχιστον υπακολουθία της που αποκλίνει. [5]

   (δ΄) Υπάρχουν 2 υπακολουθίες της που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια. [6]

   (Πολλές φορές βοηθάει να πάρουμε τις ακολουθίες των άρτιων και περιττών όρων της a_n, δηλαδή τις a_{2n} και a_{2n-1}.)

3. **Μια ακολουθία ΔΕΝ είναι φραγμένη αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Είναι μονότονη και αποκλίνει. [7]

   (β΄) Υπάρχει υπακολουθία της που είναι ΜΗ φραγμένη. [8]

   (γ΄) Καμμία υπακολουθία της ΔΕ συγκλίνει. [9]

4. **Μια ακολουθία ΔΕΝ είναι μονότονη αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Είναι φραγμένη και αποκλίνει. [10]

   (β΄) Αποκλίνει και έχει υπακολουθία που συγκλίνει. [11]

---

[3] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης:
Μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι βασική

[4] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 6.4 στη σελ. 87

[5] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 6.50 στη σελ. 95

[6] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 6.50 στη σελ. 95

[7] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 6.9 στη σελ. 88

[8] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης:
Κάθε υπακολουθία φραγμένης ακολουθίας, είναι φραγμένη

[9] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 6.46 στη σελ. 94

[10] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 6.9 στη σελ. 88

[11] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης:
Αν μια μονότονη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία τότε συγκλίνει

3.2 Συναρτήσεις

1. **Δύο συναρτήσεις f, g ΔΕΝ είναι ίσες αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Έχουν διαφορετικό πεδίο ορισμου, $D_f \neq D_g$.

   (β΄) Εφόσον $D_f = D_g = A$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x_0) \neq g(x_0)$.

2. **Έστω 2 συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$.**
   Η σύνθεση $f \circ g$ ΔΕΝ ορίζεται αν:

$$g(B) \cap A = \varnothing$$

3. **Έστω συνάρτηση $f : A \to B$.**
   Το B ΔΕΝ είναι σύνολο τιμών της f αν:

   Υπάρχει $y \in B$ ώστε για κάθε $x \in A$ να είναι $f(x) \neq y$. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει $y \in B$ ώστε η εξίσωση $f(x) = y$ να είναι αδύνατη για κάθε $x \in A$.

4. **Το $a \in \mathbb{R}$ ΔΕΝ ανήκει στο σύνολο τιμών της f αν:**

   Η εξίσωση $f(x) = a$ είναι αδύνατη για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f. [12]

5. **Η συνάρτηση $f(x)$ ΔΕΝ είναι περιοδική αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Δεν υπάρχει $T \in \mathbb{R}^*$ τέτοιο ώστε $f(x + T) = f(x)$ για κάθε $x \in D_f$.

   (β΄) Η $f(x)$ είναι μονότονη.

   (γ΄) Η $f(x)$ είναι “1-1”.

   (δ΄) Έχει οριζόντια ή πλαγια ασύμπτωτη.

   (ε΄) Η $f'(x)$ ΔΕΝ είναι περιοδική. [13]

[12] Εκτός πεδίου ορισμού είναι δυνατό να υπάρχουν ρίζες της εξίσωσης.
[13] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 9.1 στη σελ. 137

6. **Η συνάρτηση $f(x)$ ΔΕΝ είναι άρτια αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η $f(x)$ είναι μονότονη.

   (β΄) Η $f(x)$ είναι "1-1".

   (γ΄) Υπάρχει $x \in D_f$ ώστε $f(-x) \neq f(x)$.

7. **Η συνάρτηση $f(x)$ ΔΕΝ είναι περιττή αν:**

   Υπάρχει $x \in D_f$ ώστε $f(-x) \neq -f(x)$.

8. **Η συνάρτηση $f(x)$ ΔΕΝ είναι "1-1" στο D_f αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Υπάρχει y στο σύνολο τιμών της $f(x)$ ώστε η εξίσωση $f(x) = y$ να έχει 2 διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες ως προς $x \in D_f$. (Η εξίσωση $f(x) = y$ ΔΕΝ έχει μοναδική λύση ως προς $x \in D_f$)

   (β΄) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.

   (Στην πράξη, συνήθως προσπαθούμε να βρούμε δύο διαφορετικές ρίζες της $f(x)$.)

   (γ΄) Υπάρχει σύνολο $A \subseteq D_f$ ώστε για κάθε $x \in A$ η συνάρτηση είναι σταθερη.

   (δ΄) Είναι $D_f = A \cup B$ και $f(A) \cap f(B) \neq \varnothing$.

   (ε΄) Το D_f είναι διάστημα και η f είναι συνεχής και ΜΗ γνησίως μονότονη σε αυτό. [14]

   (ϛ΄) Είναι περιοδική.

   (ζ΄) Είναι άρτια ή πιο γενικά, έχει συμμετρία ως προς κατακόρυφο άξονα.

9. **Μια συνάρτηση ΔΕΝ αντιστρέφεται αν:**

   ΔΕΝ είναι "1-1".

[14] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 8.37 στη σελ. 123

10. **Μια συνάρτηση g ΔΕΝ είναι αντίστροφη της f αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

    (α΄) Η g ΔΕΝ είναι "1-1".

    (β΄) Υπάρχει $x_0 \in D_g$ ώστε $g(x_0) \notin D_f$ ή αλλιώς υπάρχει $x_0 \in D_f$ ώστε $f(x_0) \notin D_g$.

    (γ΄) $D_g \neq R_f$ ή $D_f \neq R_g$.

11. **Η συνάρτηση $f(x)$ ΔΕΝ είναι φραγμένη στο D_f αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

    (α΄) Υπάρχει $x \in D_f$ ώστε $|f(x)| > \partial$ για κάθε $\partial > 0$.

    (β΄) Έχει κατακόρυφη ή πλάγια ασύμπτωτη.

    (γ΄) Έχει μη φραγμένο σύνολο τιμών.

3.3 Όρια

1. **Το όριο της συνάρτησης $f(x)$ καθώς το $x \to x_0$ ΔΕΝ ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

    (α΄) Το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ΔΕΝ υπάρχει.

    (β΄) Είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = m \neq \ell$.

    (γ΄) Είναι $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| \neq |\ell|$.

    (δ΄) Υπάρχει ακολουθία $a_n,\ n \in \mathbb{N}$, $a_n \to x_0$ ώστε $\lim f(a_n) \neq \ell$.

    (ε΄) Κάποιο από τα $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ή $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ είναι διάφορο του ℓ.

    (Είναι χρήσιμο στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου, όπου στην περίπτωση που αλλάζει ο τύπος στο x_0, επιλέγουμε τον πιο εύκολο τύπο για τον υπολογισμό του ορίου.)

2. **Το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ΔΕΝ υπάρχει στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Κάποιο από τα $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ή $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ΔΕΝ υπάρχει στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

   (β΄) Είναι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

   (γ΄) Υπάρχει ακολουθία a_n, $n\in\mathbb{N}$, $a_n \to x_0$ ώστε το $\lim f(a_n)$ ΔΕΝ υπάρχει στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

   (δ΄) Υπάρχουν ακολουθίες a_n, b_n, $n\in\mathbb{N}$, με $a_n \neq b_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και $a_n\to x_0$, $b_n \to x_0$ ώστε $\lim f(a_n) \neq \lim f(b_n)$.

   (ε΄) Η f είναι άθροισμα, γινόμενο ή πηλίκο δύο συναρτήσεων, από τις οποίες η ΜΙΑ ΜΟΝΟ ΔΕΝ έχει όριο στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ καθώς το $x\to x_0$. Το όριο της άλλης ανήκει στο $\mathbb{R}^*$. [15]
   Για παράδειγμα:
   Έστω $f = g + h$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ενώ $\lim_{x\to x_0} h(x)$ ΔΕΝ υπάρχει στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Αν το όριο της f υπάρχει και είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = m \in \mathbb{R}$ ή $\pm\infty$, τότε επειδή $h = f - g$, έχουμε $\lim_{x\to x_0} h(x) = (m-\ell) \in \mathbb{R}$ ή ισούται με $\pm\infty$.
   ΆΤΟΠΟ.
   Άρα το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ΔΕΝ υπάρχει στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

   Παρατήρηση 3.1. *Αν ΚΑΙ οι δύο συναρτήσεις δεν έχουν όριο, τότε ίσως το άθροισμα, γινόμενο ή πηλίκο αυτών να έχει όριο. Έστω $g(x) = \frac{1}{x}$ και $h(x) = x - \frac{1}{x}$ οπότε $f(x) = g(x) + h(x) = x$. Τα όρια των g και h ΔΕΝ υπάρχουν καθώς το $x \to 0$, είναι όμως $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.*

[15] Το όριο δεν είναι απαραίτητα διάφορο του μηδέν, μόνο όμως στην περίπτωση του αθροίσματος, όπως βλέπουμε και στο παράδειγμα.

3.4 Συνέχεια

1. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ είναι συνεχής στο $x_0 \in D_f \subseteq \mathbb{R}$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ΔΕΝ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

   (β΄) Είναι $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

   (γ΄) Η συνάρτηση $|f(x)|$ ΔΕΝ είναι συνεχής στο x_0.

2. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ είναι συνεχής στο $\Delta \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Υπάρχει $x_0 \in \Delta$ στο οποίο η f ΔΕΝ είναι συνεχής.

   (β΄) Το Δ είναι διάστημα και η f είναι "1-1" και ΜΗ γνησίως μονότονη σε αυτό. [16]

   (γ΄) Το Δ είναι διάστημα και η συνάρτηση f ΔΕΝ έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών σε αυτό. [17]

   (δ΄) Το Δ είναι κλειστό διάστημα και η συνάρτηση f ΔΕΝ παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Με άλλα λόγια ΔΕΝ είναι φραγμένη σε αυτό. [18]

   (ε΄) Το $f(\Delta)$ ΔΕΝ είναι διάστημα και η f είναι ΜΗ σταθερή στο διάστημα Δ. [19]

   (ϛ΄) Το Δ είναι κλειστό διάστημα και η συνάρτηση f ΔΕΝ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε αυτό. [20]

   (ζ΄) Το Δ είναι κλειστό διάστημα και η συνάρτηση f ΔΕΝ έχει αρχική σε αυτό. [21]

[16] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 8.37 στη σελ. 123
[17] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 8.23 στη σελ. 117
[18] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 8.28 στη σελ. 120
[19] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 8.44 στη σελ. 128
[20] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 10.6 στη σελ. 174
[21] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 10.21 στη σελ. 181

3.5 Παραγώγιση

1. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α') Το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}$ ΔΕΝ είναι πραγματικός αριθμός. (Είναι $\pm$ ή ΔΕΝ υπάρχει.)

   (β') Η συνάρτηση f ΔΕΝ είναι συνεχής στο x_0.

2. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta \subseteq D_f \in \mathbb{R}$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α') Υπάρχει $x_0 \in \Delta$ στο οποίο η f ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη.

3.6 Μονοτονία και ακρότατα

1. **Η συνάρτηση $f(x)$ ΔΕΝ είναι μονότονη στο D_f αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α') Υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in D_f$ με $x_1 < x_2 < x_3$ ώστε $f(x_1) < f(x_2)$ και $f(x_2) > f(x_3)$.
   (Δηλαδή ο λόγος $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ΔΕ διατηρεί σταθερό πρόσημο)

   (β') Υπάρχουν $x_1, x_2 \in D_f$ ώστε $f'(x_1) > 0$ και $f'(x_2) < 0$.
   (Δηλαδή η f' ΔΕ διατηρεί σταθερό πρόσημο)

   (γ') Η f ΔΕΝ είναι "1-1" στο D_f. [22]

   (δ') Το D_f είναι διάστημα και η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε εσωτερικό σημείο του D_f.

   (ε') Το D_f και το σύνολο τιμών της f είναι διαστήματα, και η f ΔΕΝ είναι συνεχής. [23]

[22] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 8.31 στη σελ. 121)

[23] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 8.40 στη σελ. 125

(ϛ΄) Το D_f είναι κλειστο διάστημα και η f ΔΕΝ είναι φραγμένη σε αυτό. [24]

(ζ΄) Το D_f είναι κλειστο διάστημα και η f ΔΕΝ είναι ολοκληρώσιμη σε αυτό. [25]

2. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα Δ' ενός διαστήματος Δ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Σε κάθε υποδιάστημα Δ' του διαστήματος Δ, υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \Delta'$ με $x_1 < x_2 < x_3$ ώστε $f(x_1) < f(x_2)$ και $f(x_2) > f(x_3)$.
   (Δηλαδή ο λόγος $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ΔΕ διατηρεί σταθερό πρόσημο πουθενά.) [26]

   (β΄) Σε κάθε υποδιάστημα Δ' του διαστήματος Δ, υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta'$ ώστε $f'(x_1) > 0$ και $f'(x_2) < 0$.
   (Δηλαδή η f' ΔΕ διατηρεί σταθερό πρόσημο πουθενά.) [27]

3. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = x_0 \in D_f$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $\Delta \in D_f$ και είναι $f'(x_0) \neq 0$. [28]

   (β΄) Η συνάρτηση f έχει το ίδιο είδος μονοτονίας αριστερά και δεξιά του x_0 και είναι συνεχής στο x_0.

4. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στο ανοιχτό διάστημα Δ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

[24] Αντιθετοαντιστροφή της υποσημείωσης 2 στη σελ. 176

[25] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης 10.10 στη σελ. 176

[26] Βλέπε εφαρμογή αυτού του τρόπου απόδειξης στο παράδειγμα 5.3 στη σελ. 72.

[27] Βλέπε εφαρμογή αυτού του τρόπου απόδειξης στο παράδειγμα 9.49 στη σελ. 158.

[28] Αντιθετοαντιστροφή του Θ.Fermat.

(α΄) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Δ και είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

(β΄) Η συνάρτηση f είναι μονότονη στο Δ.

5. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ παρουσιάζει ολικά ακρότατα στο διάστημα Δ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η συνάρτηση f ΔΕΝ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στο ανοιχτό διάστημα Δ.

   (β΄) Η συνάρτηση f ΔΕΝ [29] είναι φραγμένη στο διάστημα Δ, είτε αυτό είναι ανοιχτό, είτε κλειστό. [30]

3.7 Κυρτότητα και σημεία καμπής

1. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ είναι κυρτή (κοίλη) στο διάστημα $\Delta \subseteq D_f$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ και η παράγωγος $f'(x)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) σε κάποιο υποδιάστημα του Δ.

   (β΄) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ και είναι $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) σε κάποιο υποδιάστημα του Δ.

2. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ παρουσιάζει σημεία καμπής στο διάστημα Δ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η f είναι παντού κυρτή (ή κοίλη) στο Δ. Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \geqslant 0$ (ή $f''(x) \leqslant 0$). [31]

[29] Μπορεί όμως να είναι φραγμένη και παρόλα αυτά να μην έχει ολικά ακρότατα. Βλέπε παράδειγμα 5.15 στη σελ. 79

[30] Είναι όμως πιθανό να έχει τοπικά ακρότατα.

[31] Βλέπε πρόταση 9.55 στη σελ. 161.

(β΄) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ και είναι $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. [32]

3. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = x_0 \in D_f$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

(α΄) Η f είναι κυρτή (ή κοίλη) γύρω από το x_0.

(β΄) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι $f''(x_0) \neq 0$.

(γ΄) Η γραφική παράσταση της f ΔΕΝ δέχεται εφαπτομένη ευθεία στο x_0.

3.8 Ασύμπτωτες ευθείες

1. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ έχει καμμία κατακόρυφη ασύμπτωτη αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

(α΄) Το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα και η f είναι συνεχής.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Αν η f ΔΕΝ είναι συνεχής τότε ίσως έχουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη, π.χ.:
Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} tanx, & \text{αν } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{αν } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

είναι ορισμένη στο κλειστο $[0, \frac{\pi}{2}]$, ΔΕΝ είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{2}$, και επειδή $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ η ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

[32] Αντιθετοαντιστροφή του θεωρήματος:
Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f, τότε $f''(x_0) = 0$.

(β΄) Η συνάρτηση f είναι φραγμένη. Ισοδύναμα, το σύνολο τιμών της είναι φραγμένο.

(γ΄) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = x_0$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η συνάρτηση f ΔΕΝ έχει καμμία κατακόρυφη ασύμπτωτη.

   (β΄) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = x_0$.

   (γ΄) Το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

   (δ΄) Το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ΔΕΝ υπάρχει.

3. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ έχει οριζόντια ασύμπτωτη αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Το πεδίο ορισμού είναι φραγμένο σύνολο.

   (β΄) Είναι $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}^*$ είτε ΔΕΝ υπάρχει.

   (γ΄) Είναι $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ είτε ΔΕΝ υπάρχει.

4. **Η ευθεία $y = \beta$ ΔΕΝ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης f αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η συνάρτηση f ΔΕΝ έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

   (β΄) Είναι $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} - \{\beta\}$.

5. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ έχει πλάγια ασύμπτωτη αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η συνάρτηση f είναι φραγμένη.

   (β΄) Το πεδίο ορισμού είναι φραγμένο σύνολο.

   (γ΄) Είναι $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ή $\pm\infty$ ή ΔΕΝ υπάρχει.

6. **Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ΔΕΝ είναι πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης f αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η συνάρτηση f ΔΕΝ έχει πλάγια ασύμπτωτη.

   (β΄) Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - \lambda x - \beta) = \ell \in \mathbb{R}^*$ είτε ΔΕΝ υπάρχει.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ:

7. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ έχει ασύμπτωτες αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η συνάρτηση f είναι συνεχής με πεδίο ορισμού φραγμένο και κλειστό διάστημα.

   (β΄) Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f είναι φραγμένα σύνολα.

   (γ΄) Η συνάρτηση f είναι συνεχής με πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα, και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ ή ΔΕΝ υπάρχει.

   (δ΄) Η f είναι φραγμένη και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ ή ΔΕΝ υπάρχει.

3.9 Ρίζες εξισώσεων

1. **Η εξίσωση $f(x) = 0$ ΔΕΝ έχει καμμία ρίζα (ΑΔΥΝΑΤΗ) στο πεδίο ορισμού της f, αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Το μηδέν ΔΕΝ ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

   (β΄) Είναι $f(x) > 0$ (ή $f(x) < 0$) για κάθε $x \in D_f$.

   (γ΄) Η f παρουσιάζει στο x_0 ολικό ακρότατο ίσο με $f(x_0)$, με την εξής ιδιότητα:
   Είναι ολικό ελάχιστο με $f(x_0) > 0$, ή είναι ολικό μέγιστο με $f(x_0) > 0$.

2. **Η εξίσωση $f(x) = 0$ ΔΕΝ είναι ΑΔΥΝΑΤΗ (έχει ΜΙΑ τουλάχιστον ρίζα) στο πεδίο ορισμού της f, αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

   (β΄) Η f είναι συνεχής και:

   i. Το μηδέν βρίσκεται μεταξύ της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής της f.

   ii. Υπάρχουν a, β στο πεδίο ορισμού της f, τέτοια ώστε $f(a) \cdot f(\beta) < 0$. [33]

   iii. Υπάρχουν a, β στο πεδίο ορισμού της f, τέτοια ώστε $f(a) < 0 < f(\beta)$. [34]

   (γ΄) Η f έχει αρχική συνάρτηση F και:

   i. Η συνάρτηση F έχει τοπικό ακρότατο. [35]

   ii. Υπάρχουν a, β στο πεδίο ορισμού της F, τέτοια ώστε $F(a) = F(\beta)$. [36]

   iii. Η συνάρτηση F ΔΕΝ είναι "1-1". [37]

   iv. Υπάρχουν a, β στο πεδίο ορισμού της F, τέτοια ώστε $f(a) \cdot f(\beta) < 0$. [38]

3. **Το $x = p$ ΔΕΝ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Είναι $f(p) \neq 0$.

   (β΄) Η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι ΑΔΥΝΑΤΗ.

   (γ΄) Υπάρχει $p_1 \in D_f$ με $p > p_1$ και είναι $f(p_1) > 0$ και η f είναι αύξουσα για $x > p_1$.

[33] Εφαρμογή του Θ.Bolzano στο διάστημα $[a, \beta]$

[34] Εφαρμογή του Θ.Ενδιάμεσων Τιμών στο διάστημα $[a, \beta]$

[35] Εφαρμογή του Θ.Fermat στη συνάρτηση F

[36] Εφαρμογή του Θ.Rolle στη συνάρτηση F στο διάστημα $[a, \beta]$

[37] Αντιθετοαντιστροφή της πρότασης:
Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D_f$ τότε η f είναι "1-1"

[38] Εφαρμογή του Θ.Darboux στη συνάρτηση F στο διάστημα $[a, \beta]$

3.10 Ολοκλήρωση

1. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $\Delta \subseteq D_f \in \mathbb{R}$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η συνάρτηση f ΔΕΝ είναι φραγμένη στο διάστημα Δ. [39]

   (β΄) Η συνάρτηση f έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας στο διάστημα Δ. [40]

2. **Η συνάρτηση F ΔΕΝ είναι αρχική (ή αλλιώς παράγουσα) της f στο διάστημα $\Delta \subseteq D_f \in \mathbb{R}$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η συνάρτηση F ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη στο Δ.

   (β΄) Υπάρχει $x_0 \in \Delta$ ώστε $F'(x_0) \neq f(x_0)$

3. **Η συνάρτηση f ΔΕΝ έχει αρχική (ή αλλιώς παράγουσα) στο κλειστό διάστημα $\Delta \subseteq D_f \in \mathbb{R}$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:**

   (α΄) Η συνάρτηση f ΔΕΝ έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών στο Δ. [41]

   (β΄) Η f είναι άθροισμα δύο συναρτήσεων από τις οποίες η ΜΙΑ ΜΟΝΟ ΔΕΝ έχει αρχική στο Δ.

   (γ΄) Το γινόμενο $f \cdot g$ ΔΕΝ έχει αρχική στο Δ, όπου η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο Δ.

   (δ΄) Το γινόμενο $f \cdot g$ ΔΕΝ έχει αρχική στο Δ, όπου η συνάρτηση g είναι συνεχής στο Δ και η f είναι φραγμένη στο Δ ή είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

[39] Βλέπε το συμπέρασμα 10.4 στη σελ. 174

[40] Βλέπε την υποσημείωση 4 στη σελ. 179, και την πρόταση 10.13 στη σελ. 176

[41] Βλέπε την παρατήρηση 10.18 στη σελ. 180

3.11 Όρια συναρτήσεων που ΔΕΝ υπάρχουν

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n}$, με n περιττό φυσικό αριθμό.
2. $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$
3. $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$
4. $\lim_{x\to \pm\infty} \sin x$
5. $\lim_{x\to \pm\infty} \cos x$
6. $\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}} \tan x$, με $k \in \mathbb{Z}$
7. $\lim_{x\to k\pi} \cot x$, με $k \in \mathbb{Z}$
8. $\lim_{x\to n} [x]$, με $n \in \mathbb{N}$
9. $\lim_{x\to n} (x - [x])$, με $n \in \mathbb{N}$
10. $\lim_{x\to x_0} f(x)$, όπου $f(x) = \begin{cases} a(x), & x \in \mathbb{Q} \\ b(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
με $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a(x_0) \neq b(x_0)$

Μέρος II

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Κεφάλαιο 4

ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

4.1 Σύνολα

Ορισμός 4.1. Έστω Ω το βασικό σύνολο και δύο υποσύνολα αυτού, τα A και B.

1. Τα A και B είναι **ξένα** ή αλλιώς **ασυμβίβαστα** όταν $A \cap B = \emptyset$. δηλαδή
$$x \in A \Rightarrow x \notin B$$
ή ισοδύναμα
$$x \in B \Rightarrow x \notin A$$

2. Τα A και B είναι **αντίθετα** ή αλλιώς **συμπληρωματικά** όταν είναι ξένα και επιπλέον $A \cup B = \Omega$. Γράφουμε τότε $A = B'$ και $B = A'$.

Πρόταση 4.2. *Αν δύο σύνολα είναι αντίθετα μεταξύ τους τότε είναι και ξένα.*

Ισχυρισμός 4.3. *Αν δύο σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους τότε είναι και αντίθετα.*

Αντιπαράδειγμα 4.4. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3\}$ το βασικό σύνολο, και τα σύνολα $A = \{1\}$ και $B = \{2\}$. Είναι ξένα μεταξύ τους αφού $A \cap B = \emptyset$, αλλά $A \cup B = \{1, 2\} \neq \Omega$ οπότε ΔΕΝ είναι αντίθετα.

Ισχυρισμός 4.5. *Αν για δύο σύνολα A, B ισχύει ότι $A \cup B = \Omega$ τότε είναι αντίθετα.*

Αντιπαράδειγμα 4.6. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3\}$ το βασικό σύνολο, και τα σύνολα $A = \{1, 2\}$ και $B = \{2, 3\}$. Ισχύει ότι $A \cup B = \Omega$ αλλά ΔΕΝ είναι ξένα αφού $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$, οπότε ΔΕΝ είναι αντίθετα.

Ισχυρισμός 4.7. *Αν τα σύνολα A, B είναι ξένα τότε είναι ξένα και τα A' και B'.*

Αντιπαράδειγμα 4.8. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3\}$ το βασικό σύνολο, και τα σύνολα $A = \{1\}$ και $B = \{2\}$ οπότε $A' = \{2, 3\}$ και $B' = \{1, 3\}$. Ισχύει ότι $A \cap B = \emptyset$ αλλά τα A' και B' ΔΕΝ είναι ξένα αφού $A' \cap B' = \{3\} \neq \emptyset$.

Ισχυρισμός 4.9. *Αν $A \not\subseteq B$ τότε $B \subset A$.*

Αντιπαράδειγμα 4.10. Μπορεί τα σύνολα A, B να είναι ξένα μεταξύ τους οπότε είναι $A \not\subseteq B$ και $B \not\subseteq A$. Υπάρχει επίσης και η περίπτωση τα σύνολα A, B να μην είναι ξένα μεταξύ τους, και παρόλαυτά να είναι $A \not\subseteq B$ και $B \not\subseteq A$:
$A = \{1, 2\}$ και $B = \{2, 3\}$ οπότε $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$

Πρόταση 4.11. *Έστω 3 σύνολα A, B, C. Αν $A = B$ τότε*

1. $A \cup C = B \cup C$
2. $A \cap C = B \cap C$

Ισχυρισμός 4.12. *Ισχύει το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης, δηλαδή*

1. *Αν* $A \cup C = B \cup C$ *τότε* $A = B$.

2. *Αν* $A \cap C = B \cap C$ *τότε* $A = B$.

Αντιπαράδειγμα 4.13. 1. Αν $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{1,3\}$ τότε $A \cup C = B \cup C = \{1,2,3\}$ ενώ $A \neq B$.

2. Αν $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{1,2,3\}$ τότε $A \cap C = B \cap C = \{2\}$ ενώ $A \neq B$.

Ισχύει όμως η εξής πρόταση:

Πρόταση 4.14. *Αν* $A \cup C = B \cup C$ *και* $A \cap C = B \cap C$ *τότε* $A = B$.

Πρόταση 4.15. *Η τομή* ***πεπερασμένου*** *αριθμού ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.*

Ισχυρισμός 4.16. *Η τομή* ***τυχόντος*** *πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.*

Αντιπαράδειγμα 4.17. Η τομή των ανοικτών συνόλων $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ είναι το κλειστό σύνολο $\{0\}$.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

Απόδειξη. Έστω $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = A_n$.
Επειδή $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συμπεραίνουμε ότι $0 \in A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε έχουμε

$$0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

και

$$\{0\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \tag{4.1}$$

Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να ισχύει και ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \{0\}$$

Έστω ότι αυτό ΔΕΝ ισχύει.
Τότε θα υπάρχει ένα $x \in A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $x \neq 0$. Άρα $|x| < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως $|x| > 0$ και επομένως $n < \frac{1}{|x|}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί το σύνολο $\mathbb{N}$ δεν είναι φραγμένο άνω.
Άρα έχουμε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \{0\} \tag{4.2}$$

οπότε από τις 4.1 και 4.2 ισχύει ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

□

Πρόταση 4.18. *Η ένωση* ***πεπερασμένου*** *αριθμού κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*

Ισχυρισμός 4.19. *Η ένωση* ***τυχόντος*** *πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*

Αντιπαράδειγμα 4.20. Η ένωση των κλειστών συνόλων $\left[\frac{1-n}{n}, \frac{n-1}{n}\right]$ είναι το ανοιχτό σύνολο $(-1, 1)$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left[\frac{1-n}{n}, \frac{n-1}{n}\right]\right) = (-1, 1)$$

Απόδειξη. Έστω $\left[\frac{1-n}{n}, \frac{n-1}{n}\right] = A_n$.
Επειδή $-1 < \frac{1-n}{n} \leqslant \frac{n-1}{n} < 1$ (το "=" ισχύει για $n = 1$ οπότε $A_n = \{0\}$) ισχύει ότι

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset (-1, 1) \tag{4.3}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει και

$$(-1, 1) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Έχουμε

$$\text{για κάθε } x \in (-1, 1) \Leftrightarrow$$
$$0 \leqslant |x| < 1 \Rightarrow$$
$$0 < 1 - |x| \leqslant 1$$

και λόγω της Αρχιμήδειας ιδιότητας των πραγματικών αριθμών[1] συνεπάγεται ότι

$$\text{υπάρχει } n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leqslant 1 - |x| \Rightarrow$$
$$\text{υπάρχει } n \in \mathbb{N} : |x| \leqslant 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow$$
$$\text{υπάρχει } n \in \mathbb{N} : x \in \left[\frac{1-n}{n}, \frac{n-1}{n}\right] \Rightarrow$$
$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

και άρα

$$(-1, 1) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \tag{4.4}$$

Έτσι από τις 4.3 και 4.4 έχουμε

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-1, 1)$$

□

[1] Αν ε θετικός πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $n \geqslant 1$, ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Παρατήρηση 4.21. *Ο περιορισμός σε πεπερασμένο αριθμό συνόλων στις προτάσεις 4.15 και 4.18 είναι απαραίτητος για την εξαγωγή του συμπεράσματος.*

Είδαμε ότι στην περίπτωση που έχουμε άπειρο πλήθος συνόλων, οι παραπάνω προτάσεις ΔΕΝ αληθεύουν.

Ισχύουν επίσης τα παρακάτω:

1. *Η ένωση **οσωνδήποτε**[2] ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.*

2. *Η τομή **οσωνδήποτε** κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*

4.2 Αριθμοί

Πρόταση 4.22.

1. *Το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο ρητών αριθμών είναι ρητοί αριθμοί.*

2. *Το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο αριθμών από τους οποίους ο ένας μόνο είναι άρρητος, είναι άρρητοι αριθμοί.*

Ισχυρισμός 4.23. *Το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο άρρητων αριθμών είναι άρρητοι αριθμοί.*

Αντιπαράδειγμα 4.24. Δεν είναι πάντα άρρητος, μπορεί να είναι και ρητός:
Για το άθροισμα: $\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1$
Για το διαφορά: $\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1$
Για το γινόμενο: $\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3}) = 2\sqrt{9} = 6$
Για το πηλίκο: $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2$

►***Είναι αξιοσημείωτο ότι για τις δυνάμεις δεν ισχύει κάποιος κανόνας.***

[2]Άρα και άπειρο το πλήθος

Παράδειγμα 4.25. Έχουμε τις περιπτώσεις:

Ρητές δυνάμεις ρητών: $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ ενώ $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Ρητές δυνάμεις άρρητων: $(\sqrt{3})^2 = 3$ ενώ $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

Άρρητες δυνάμεις ρητών: $2^{\log_2 3} = 3$ ενώ $2^{\log_2 \sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Άρρητες δυνάμεις άρρητων: $e^{\ln 2} = 2$ ενώ $e^{\ln \sqrt{2}} = \sqrt{2}$

όπου το $\ln 2$ είναι άρρητος, άρα και το $\ln \sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$ είναι άρρητος επίσης σαν γινόμενο ρητού επί άρρητου.

Και ένα άλλο παράδειγμα:

$(\sqrt{2})^{\log_2 9} = (\sqrt{2})^{\log_2 3^2} = (\sqrt{2})^{2\log_2 3} = \left((\sqrt{2})^2\right)^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3$

Ορισμός 4.26. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Δύο ακέραιοι αριθμοί a, b λέγονται ισοϋπόλοιποι αριθμοί με μέτρο m, όταν διαιρούμενοι με m αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο. Γράφουμε τότε:

$$a = b \bmod m$$

και η σχέση αυτή λέγεται ισοτιμία.

Πρόταση 4.27. *Έστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$ και $m \in \mathbb{N}$, τότε:*

$$a = b \bmod m \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c \bmod m$$

Ισχυρισμός 4.28. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή:*

$$a \cdot c = b \cdot c \bmod m \Rightarrow a = b \bmod m$$

Αντιπαράδειγμα 4.29. Έχουμε $13 \cdot 2 = 7 \cdot 2 \bmod 12$ ενώ $13 \neq 7 \bmod 12$.

Συμπέρασμα 4.30. *Δεν επιτρέπεται να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ισοτιμίας με τον ίδιο ακέραιο αριθμό.* [3]

[3] Μπορούμε όμως να προσθέσουμε, να αφαιρέσουμε ή να πολλαπλασιάσουμε και στα δύο μέλη μιας ισοτιμίας, τον ίδιο ακέραιο αριθμό. Επίσης δύο ισοτιμίες $\bmod m$ επιτρέπεται να προστίθενται, να αφαιρούνται και να πολλαπλασιάζονται κατά μέλη. Για παράδειγμα $11 = 5 \bmod 3$ και $7 = 4 \bmod 3$, οπότε αν τις προσθέσουμε κατά μέλη έχουμε $18 = 9 \bmod 3$.

Κεφάλαιο 5

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

►***Υπάρχουν συναρτήσεις των οποίων το γράφημα δε μπορεί να γίνει.***

Παράδειγμα 5.1. Η συνάρτηση "Dirichlet" [1]

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \tag{5.1}$$

έχει άπειρα σημεία πάνω στην ευθεία $y = 0$ όπως επίσης και στην $y = 1$. Όμως τα σημεία που ανήκουν στην $y = 0$ είναι περισσότερα από αυτά που ανήκουν στην $y = 1$ αφού το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο ενώ το σύνολο των άρρητων αριθμών μη αριθμήσιμο. Δε μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημα αυτής της συνάρτησης, επειδή μεταξύ δύο ρητών υπάρχει πάντα ένας τουλάχιστον άρρητος, και μεταξύ δύο άρρητων υπάρχει πάντα ένας τουλάχιστον ρητός.

►***Δεν υπάρχει μη σταθερή και περιοδική συνάρτηση χωρίς βασική περίοδο.***[2]

[1] Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805-1859

[2] Βασική περίοδος μιας περιοδικής συνάρτησης είναι η ελάχιστη θετική περίοδος αυτής.

Παράδειγμα 5.2. Η συνάρτηση "Dirichlet":

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι περιοδική, με περίοδο κάθε ρητό αριθμό γιατί:

Αν $T \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ τότε για $x \in \mathbb{Q}$ έχουμε $f(x+T) = 0 \neq 1 = f(x)$. Άρα ο T δεν είναι περίοδος αν είναι άρρητος.

Αν $T \in \mathbb{Q}$ τότε για $x \in \mathbb{Q}$ έχουμε $f(x+T) = 1 = f(x)$ και για $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ έχουμε $f(x+T) = 0 = f(x)$. Άρα ο T είναι περίοδος αν είναι ρήτος.

Όμως δεν υπάρχει ελάχιστος θετικός ρητός και άρα δεν έχει βασική περίοδο.

►***Υπάρχει συνάρτηση που δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της.***

Παράδειγμα 5.3. Η συνάρτηση "Dirichlet":

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Πράγματι, σε κάθε υποδιάστημα (a, b) του $\mathbb{R}$, υπάρχουν [3] άρρητοι p, q, και ρητός λ ,τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$a < p < \lambda < q < b$$

Οπότε έχουμε

$$f(p) = 0 < f(\lambda) = 1 \Rightarrow f \nearrow$$

και

$$f(\lambda) = 1 > f(q) = 0 \Rightarrow f \swarrow$$

[3]Διότι τα σύνολα των ρητών και των άρρητων αριθμών είναι πυκνά στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Σε κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$ υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρρητοι αριθμοί.

Δηλαδή σε κάθε υποδιάστημα (a, b) του $\mathbb{R}$, η συνάρτηση είναι ταυτόγχρονα και γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της.

Παρατήρηση 5.4. *Αν η λέξη υποδιάστημα αντικατασταθεί με τη λέξη υποσύνολο, τότε δεν υπάρχει συνάρτηση η οποία να μην είναι μονότονη σε κανένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.*[4]

Παράδειγμα 5.5. Επίσης η συνάρτηση

$$f(x) = xsin\frac{1}{x} \quad \text{με } x \neq 0 \tag{5.2}$$

δεν είναι μονότονη σε κανένα διάστημα της μορφής $(0, \delta)$ ή $(-\delta, 0)$ με $\delta > 0$.

Απόδειξη.

1ος τρόπος: Η συνάρτηση f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε άπειρα (αριθμήσιμο) το πλήθος σημεία $(\frac{1}{k\pi}, 0)$ αφού

$$\begin{aligned} x\sin\frac{1}{x} &= 0 \\ \sin\frac{1}{x} &= 0 \\ \frac{1}{x} &= k\pi \\ x &= \frac{1}{k\pi} \end{aligned}$$

με $k \in \mathbb{Z}^*$. Έτσι, για τη μη σταθερή συνάρτηση f, σε οποιοδήποτε διάστημα $(0, \delta)$, με δ θετικό και οσοδήποτε μικρό, υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Οπότε συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι ¨1-1¨ και άρα ούτε μονότονη στο διάστημα $(0, \delta)$.

[4] Βλέπε 10, σελ.120.

2ος τρόπος: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μονοτονίας των συναρτήσεων φτάνουμε πάλι στο ίδιο συμπέρασμα:
Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} > 0 \\ x_2 &= \frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} > 0 \\ x_3 &= \frac{1}{2k\pi + \frac{5\pi}{2}} = \frac{1}{4k\pi + \frac{\pi}{2}} > 0 \end{aligned}$$

με $x_1 > x_2 > x_3 > 0$ οσοδήποτε κοντά στο μηδέν θελήσουμε, και θα έχουμε $f(x_1) = x_1 > 0$, $f(x_2) = -x_2 < 0$ και $f(x_3) = x_3 > 0$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Άρα η μονοτονία εναλλάσσεται όλο και πιο συχνά όσο πλησιάζουμε στο μηδέν, αφού σε κάθε διάστημα $(0, \delta)$, με δ θετικό και οσοδήποτε μικρό, υπάρχουν κατάλληλα x_1, x_2, x_3 ώστε η f να είναι γν. φθίνουσα και γν. αύξουσα, οπότε λέμε ότι στο διάστημα $(0, \delta)$ δεν είναι μονότονη.

3ος τρόπος: Η παράγωγος της f είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin\frac{1}{x} + x\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} \end{aligned}$$

και σε κάθε διάστημα $(0, \delta)$, με δ θετικό και οσοδήποτε μικρό, η f' παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές, αφού αν επιλέξουμε

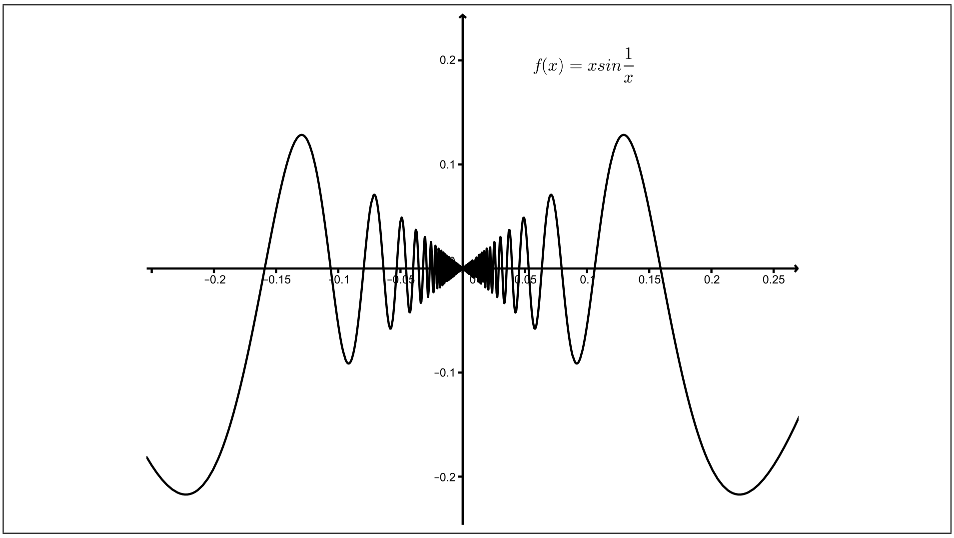
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2k\pi} \\ x_2 &= \frac{1}{2k\pi + \pi} \end{aligned}$$

αρκετά μικρά, έχουμε

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right) &= -\frac{1}{2k\pi} < 0 \\ f'\left(\frac{1}{2k\pi + \pi}\right) &= -\frac{1}{2k\pi + \pi}(-1) = \frac{1}{2k\pi + \pi} > 0 \end{aligned}$$

οπότε η f' δεν έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0, \delta)$ και επομένως δεν είναι μονότονη εκεί.

□



Σχήμα 5.1: $f(x) = xsin\frac{1}{x}$

Ισχυρισμός 5.6. *Αν μια συνάρτηση έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο διαστήματα, ξένα* [5] *μεταξύ τους, τότε στην ένωσή τους έχει οπωσδήποτε το ίδιο είδος μονοτονίας.*

Αντιπαράδειγμα 5.7. Η συνάρτηση

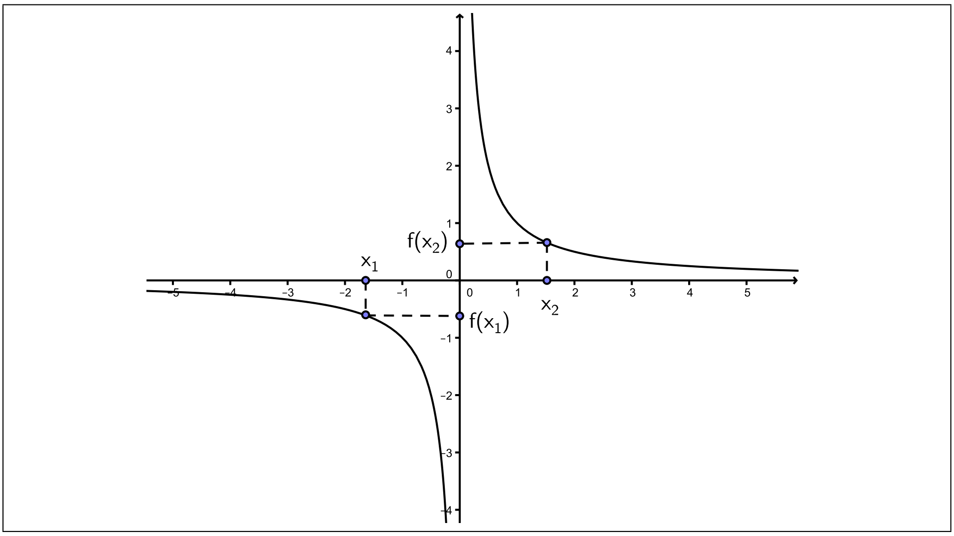
$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{5.3}$$

με

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

[5] Δύο σύνολα A, B, λέγονται ξένα όταν $A \cap B = \emptyset$.

είναι στο $(-\infty, 0)$ γνησίως φθίνουσα, στο $(0, +\infty)$ γνησίως φθίνουσα επίσης, ενώ στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχουμε για $x_1 < 0 < x_2$ ότι $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, δηλαδή βλέπουμε ότι δε διατηρεί το προηγούμενο είδος μονοτονίας, οπότε και λέμε πως η $f(x)$ δεν είναι καν μονότονη στην ένωση.



Σχήμα 5.2: $y = \frac{1}{x}$

Ισχυρισμός 5.8. *Αν μια συνάρτηση είναι άνω φραγμένη στο διάστημα $A \subseteq D_f$ και κάτω φραγμένη στο διάστημα $B \subseteq D_f$ τότε και στην ένωση $A \cup B$ είναι οπωσδήποτε φραγμένη.* [6]

Αντιπαράδειγμα 5.9. Για τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

[6]Μια συνάρτηση λέγεται φραγμένη στο διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ αν και μόνο αν υπάρχει $M > 0$, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $| f(x) | \leq M$.

με

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

ισχύει ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$, δηλαδή στο $(-\infty, 0)$ η $f(x)$ είναι άνω φραγμένη από το μηδέν, ενώ για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 0$, δηλαδή στο $(0, +\infty)$ η $f(x)$ είναι κάτω φραγμένη από το μηδέν. Στην ένωση όμως $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, η $f(x)$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$-$\{0\}$, άρα δεν ειναι φραγμένη.

Πρόταση 5.10. *Αν μια συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο, τότε είναι κάτω φραγμένη.* [7]

Ισχυρισμός 5.11. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει ολικό ελάχιστο.*

Αντιπαράδειγμα 5.12. Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \tag{5.4}$$

με

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

είναι κάτω φραγμένη χωρίς όμως να παρουσιάζει ελάχιστη τιμή.

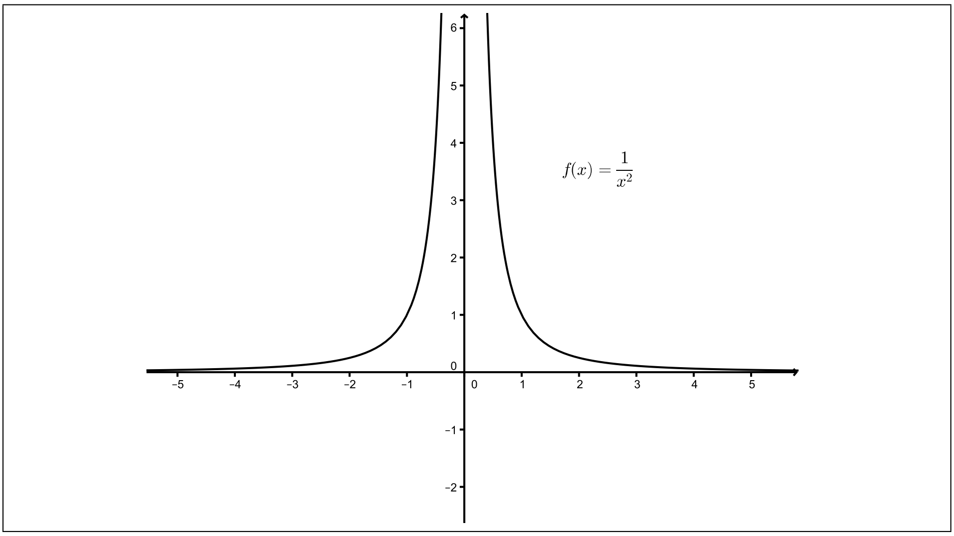
Αντιπαράδειγμα 5.13. Το ίδιο ισχύει για τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{|x|} \tag{5.5}$$

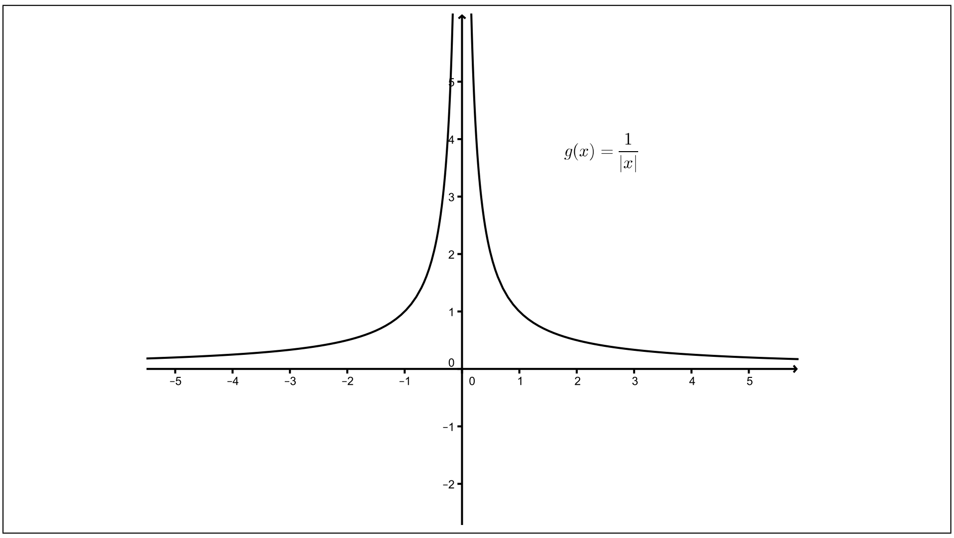
με

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

[7] Η τιμή του ολικού ελάχιστου είναι το μέγιστο κάτω φράγμα (infimum)



Σχήμα 5.3: $y = \frac{1}{x^2}$



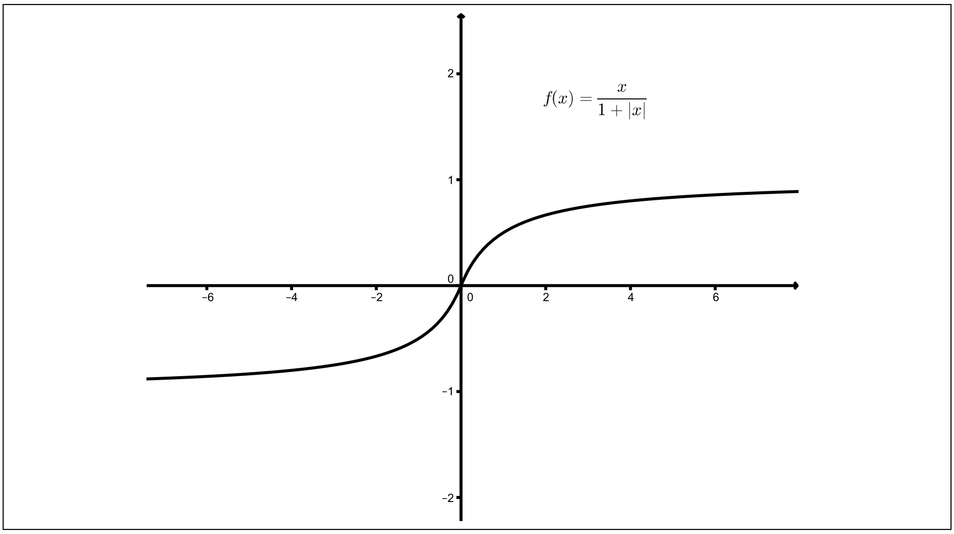
Σχήμα 5.4: $y = \frac{1}{|x|}$

Συμπέρασμα 5.14. *Γενικότερα, μια συνάρτηση μπορεί να είναι φραγμένη σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ αλλά να μη παρουσιάζει ολικά ακρότατα στο Δ.*

Αντιπαράδειγμα 5.15. Ένα παράδειγμα είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \tag{5.6}$$

με $x \in \mathbb{R}$, σύνολο τιμών το (-1,1), άνω φράγμα το 1, κάτω φράγμα το -1, αλλά χωρίς μέγιστη και ελάχιστη τιμή αφού είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.



Σχήμα 5.5: $y = \frac{x}{1+|x|}$

Παρατήρηση 5.16. *Αυτό συμβαίνει γιατί το πεδίο ορισμού της συνεχούς συνάρτησης ΔΕΝ είναι κλειστό. (Θ. Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής)* [8]

---

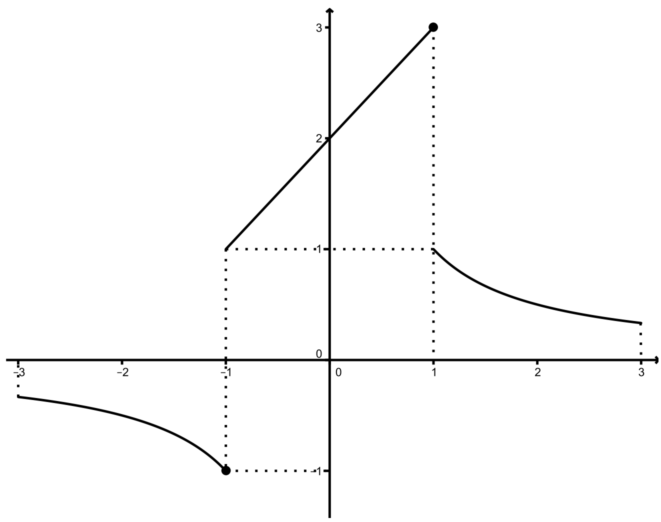
[8] Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα τότε παρουσιάζει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο σε αυτό.

►***Υπάρχει συνάρτηση "1-1" ορισμένη σε ανοιχτό διάστημα που παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και μέγιστο.***

Παράδειγμα 5.17. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & -3 < x \leqslant -1 \\ x+2, & -1 < x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x}, & 1 < x < 3 \end{cases} \tag{5.7}$$

έχει πεδίο ορισμού το ανοιχτό διάστημα $(-3, 3)$, είναι "1-1" σ' αυτό, στο $x = -1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ίσο με $f(-1) = -1$ και στο $x = 1$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με $f(1) = 3$.



Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & -3 < x \leqslant -1 \\ x+2, & -1 < x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x}, & 1 < x < 3 \end{cases}$

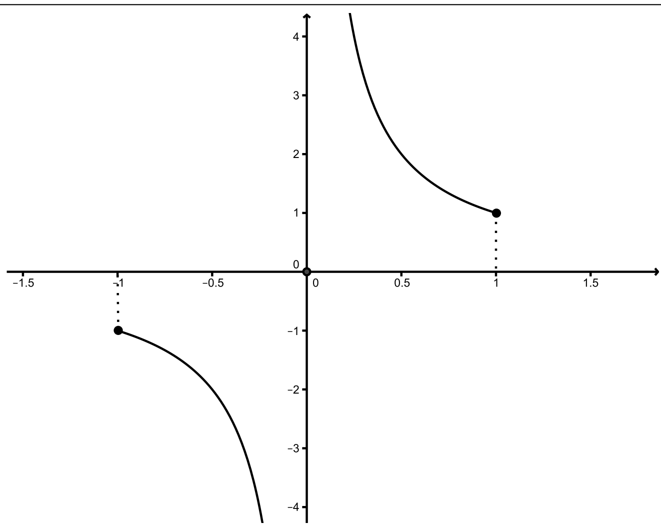
Σχήμα 5.6: Συνάρτηση "1-1" ορισμένη σε ανοιχτό διάστημα με ολικά ακρότατα.

►***Υπάρχει συνάρτηση "1-1" ορισμένη σε κλειστό διάστημα χωρίς ολικά ακρότατα.***

Παράδειγμα 5.18. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < |x| \leqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

έχει πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$, είναι "1-1" σ' αυτό, και δεν παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ή μέγιστο.



Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < |x| \leqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Σχήμα 5.7: Συνάρτηση "1-1" ορισμένη σε κλειστό διάστημα χωρίς ολικά ακρότατα.

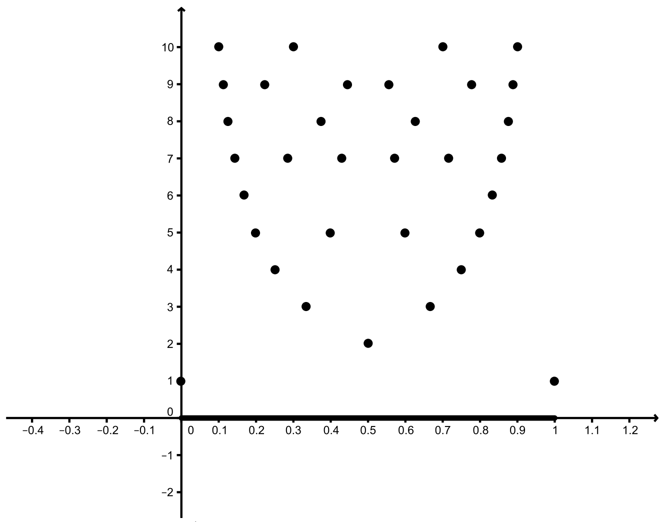
Παρατήρηση 5.19. *Αυτό συμβαίνει γιατί η συνάρτηση ΔΕΝ είναι συνεχής στο μηδέν. (Θ. Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής)*

►***Υπάρχει συνάρτηση που δεν είναι άνω φραγμένη σε κανένα υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της.***

Παράδειγμα 5.20. Η συνάρτηση [9] $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ n, & \text{αν } x = \frac{m}{n} \quad \text{με } m, n \in \mathbb{N} \text{ και } (m,n) = 1 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

δεν είναι σε κανένα υποδιάστημα του $[0,1]$ άνω φραγμένη.



Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ n, & \text{αν } x = \frac{m}{n} \quad \text{με } m, n \in \mathbb{N} \text{ και } (m,n) = 1 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Σχήμα 5.8: Συνάρτηση πουθενά άνω φραγμένη.

[9] Βλέπε στο [1] στη σελ.781 και για απόδειξη στο [13] στη σελ.156

Ισχυρισμός 5.21. *Αν f και g είναι συναρτήσεις "1-1", τότε και οι συναρτήσεις* $\left.\begin{matrix} f+g \\ f\cdot g \\ \frac{f}{g} \end{matrix}\right\}$ *είναι "1-1".*

Αντιπαράδειγμα 5.22. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x \quad \text{και} \quad g(x) = -x \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

οι οποίες είναι "1-1" στο $\mathbb{R}$, ενώ οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ (f\cdot g)(x) &= x^2, \quad x \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= -1, \quad x \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

ΔΕΝ είναι \1-1".

Πρόταση 5.23. *Αν οι συναρτήσεις g, f είναι "1-1" και ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$, τότε η σύνθεση $f \circ g$ είναι "1-1".*

Ισχυρισμός 5.24. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η σύνθεση $f \circ g$ είναι "1-1", τότε και οι συναρτήσεις g, f είναι "1-1".*

Αντιπαράδειγμα 5.25. Έστω

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right) \tag{5.10}$$

με $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ και

$$g(x) = x^2 \tag{5.11}$$

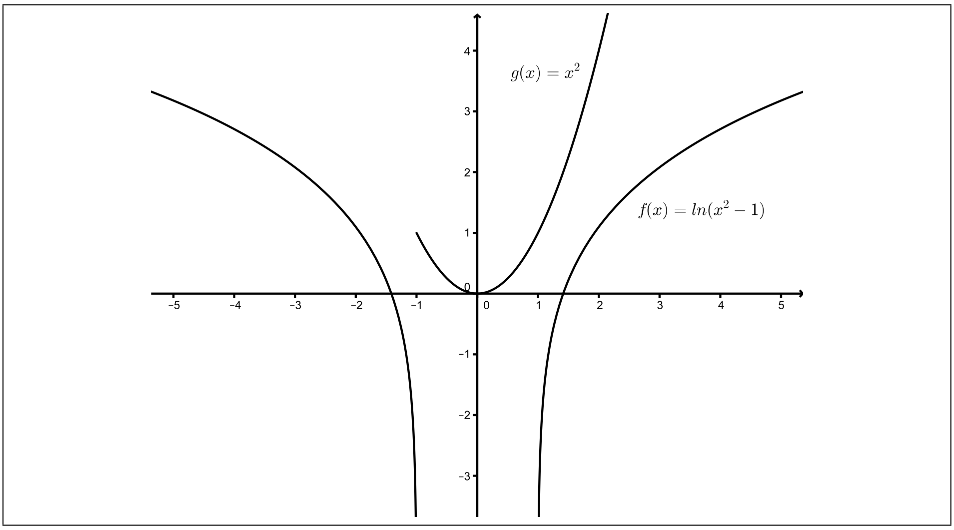
με $x \in (-1, +\infty)$ Οι 2 συναρτήσεις δεν είναι "1-1" στο πεδίο ορισμού τους, αλλά η σύνθεση αυτών

$$(f \circ g)(x) = \ln\left(x^4 - 1\right) \tag{5.12}$$

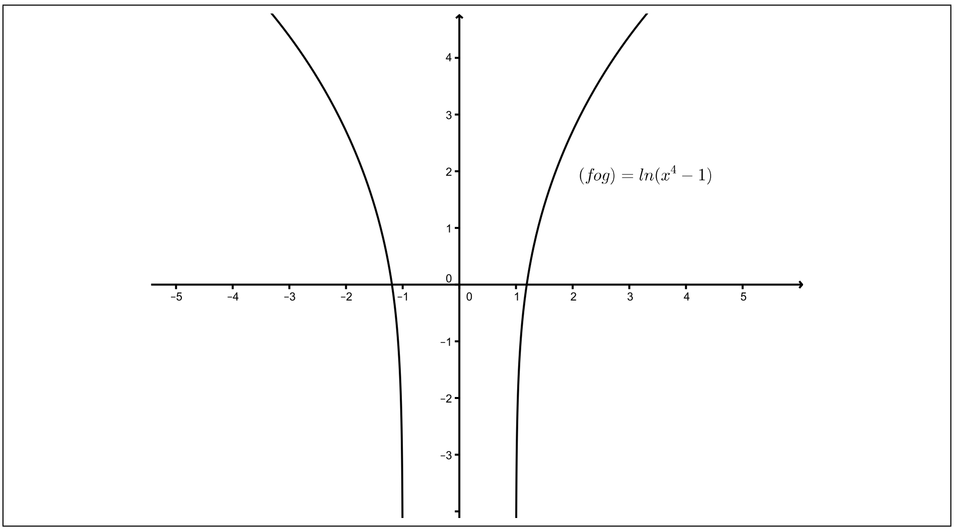
έχει πεδίο ορισμού το

$$\left\{x > -1 \mid x^2 < -1 \text{ ή } x^2 > 1\right\} = (1, +\infty)$$

και είναι "1-1" σε αυτό!



Σχήμα 5.9: $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ και $g(x) = x^2$



Σχήμα 5.10: $(f \circ g)(x) = \ln\left(x^4 - 1\right)$

Παρατήρηση 5.26. *Γενικά η* $\ln\left(x^4 - 1\right)$ *έχει πεδίο ορισμού το*

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

στο οποίο ΔΕΝ είναι "1-1", αλλά εδώ σαν σύνθεση είναι ορισμένη στο $(1, +\infty)$ όπου είναι "1-1".

Άξιο προσοχής είναι ότι στο $(1, +\infty)$ είναι "1-1" και η f και η g, γι'αυτό και η σύνθεσή τους είναι "1-1" εκεί.

Συμπέρασμα 5.27. *Ισχύει η ισοδυναμία:*

Οι συναρτήσεις $g : A \to B$ ***,*** $f : B \to C$ ***είναι "1-1" και επί*** [10]***, αν και μόνο αν, η σύνθεση*** $f \circ g$ ***είναι "1-1" στο*** A***.***

Επίσης ισχύει και η επόμενη πρόταση:

Πρόταση 5.28. *Δίνονται οι συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$. Ισχύουν τα εξής:*

1. *Αν $f(A) \subseteq B$ και η σύνθεση $g \circ f$ είναι "1-1", τότε και η συνάρτηση f είναι "1-1".*

2. *Αν $f(A) = B$ και η σύνθεση $g \circ f$ είναι "1-1", τότε και η συνάρτηση g είναι "1-1".*

Απόδειξη. 1. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ και επειδή $f(A) \subseteq B$, ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$ και έχουμε $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, οπότε $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Όμως η σύνθεση $g \circ f$ είναι "1-1", άρα $x_1 = x_2$ και επομένως η συνάρτηση f είναι "1-1".

2. Υπάρχουν $y_1, y_2 \in B$ με $g(y_1) = g(y_2)$. [σχέση (1)]
Επειδή $f(A) = B$ και $y_1, y_2 \in B$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ ώστε $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$. [σχέσεις (2) και (3)]
Οπότε, από τις σχέσεις (1),(2) και (3) συνεπάγεται ότι $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, δηλαδή $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Όμως η σύνθεση $g \circ f$ είναι "1-1", άρα $x_1 = x_2$, και αφού η f είναι συνάρτηση, έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$. Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε τώρα ότι $y_1 = y_2$, οπότε η συνάρτηση g είναι "1-1".

□

[10]Επί λέγεται μια συνάρτηση $f : A \to B$ όταν $f(A) = B$.

►***Υπάρχει συνάρτηση f της οποίας η αντίστροφη f^{-1} έχει ακριβώς τον ίδιο τύπο, πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών με αυτή.***

Παράδειγμα 5.29. Η ταυτοτική συνάρτηση

$$f(x) = x, \quad \text{με } x \in \mathbb{R} \tag{5.13}$$

Παράδειγμα 5.30. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{5.14}$$

Παράδειγμα 5.31. Η αντίστροφη μιας γραμμικής ρητής συνάρτησης

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

με $c, d \neq 0$, είναι επίσης γραμμική ρητή, και οι δύο αντίστροφες συναρτήσεις συμπίπτουν όταν $d = -a$.

Κεφάλαιο 6

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ισχυρισμός 6.1. *Κάθε ακολουθία μπορεί να παρασταθεί με ένα πεπερασμένο πλήθος πρώτων όρων.*

Αντιπαράδειγμα 6.2. Οι όροι $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$ είναι οι 4 πρώτοι όροι της ακολουθίας $a_n = n$.

Όμως και η ακολουθία

$$b_n = n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

έχει τους ίδιους 4 πρώτους όρους, ενώ γενικά $a_n \neq b_n$ για $n > 4$. (Είναι $a_5 = 5 \neq 29 = b_5$)

Συμπέρασμα 6.3. *Μια ακολουθία ΔΕ μπορεί να παρασταθεί με ένα πεπερασμένο πλήθος πρώτων όρων γιατί υπάρχουν άπειρες άλλες ακολουθίες με τους ίδιους πρώτους όρους.*

Πρόταση 6.4. *Κάθε συγκλίνουσα* [1] *ακολουθία είναι και φραγμένη.*

[1]Μια ακολουθία συγκλίνει αν έχει όριο πραγματικό αριθμό. Αν το όριο είναι $\pm\infty$, τότε αποκλίνει στο $\pm\infty$ ή συγκλίνει κατ᾽ἐκδοχήν. Αλλιώς λέμε ότι δεν έχει όριο (αποκλίνουσα).

Ισχυρισμός 6.5. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε ακολουθία που είναι φραγμένη, συγκλίνει.*

Αντιπαράδειγμα 6.6. Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη, γιατί είναι $| a_n | \leqslant 1$ αφού $a_n = -1$ ή 1, αλλά δεν έχει όριο (άρα δε συγκλίνει) γιατί υπαρχουν 2 διαφορετικές υπακολουθίες της a_n με άνισα όρια:

$$a_{k_n} = (-1)^{2n} \to 1$$

και

$$a_{p_n} = (-1)^{2n+1} \to -1$$

Συμπέρασμα 6.7. *Μια φραγμένη ακολουθία δεν είναι απαραίτητα και συγκλίνουσα.*

Πρόβλημα 6.8. Πότε μια φραγμένη ακολουθία θα είναι και συγκλίνουσα;

Ισχύει το εξής:

Πρόταση 6.9. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.*

Γενικότερα: Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο. Αν είναι και φραγμένη το όριο είναι πραγματικός αριθμός, ενώ αν δεν είναι φραγμένη το όριο είναι $\pm\infty$.

Παρατήρηση 6.10. *Αν μια φραγμένη ακολουθία δεν είναι μονότονη, τότε μπορεί να συγκλίνει αλλά μπορεί και να μη συγκλίνει.*

Παράδειγμα 6.11. Όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη και μη μονότονη, αλλά ΔΕ συγκλίνει.

Παράδειγμα 6.12. Η ακολουθία $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ είναι φραγμένη, αφού $|a_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \left|\dfrac{1}{n}\right| \leqslant 1$ και μη μονότονη, αλλά συγκλίνει, με $a_n \to 0$.

Ισχυρισμός 6.13. *Αν μια ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$ ($-\infty$), τότε είναι αύξουσα (φθίνουσα).*

Αντιπαράδειγμα 6.14. Η ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} 2n, & n \text{ άρτιος} \\ 2n-3, & n \text{ περιττός} \end{cases} \tag{6.1}$$

έχει όριο $+\infty$, αλλά δεν είναι αύξουσα.

Ισχυρισμός 6.15. *Αν μια ακολουθία θετικών όρων είναι γνησίως αύξουσα τότε αποκλίνει στο $+\infty$.*

Αντιπαράδειγμα 6.16. Η ακολουθία $a_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ είναι γνησίως αύξουσα με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αλλά $\lim a_n = 2$.

Πρόταση 6.17. *Αν $a_n \to l \in \mathbb{R}$ τότε $|\, a_n \,| \to |\, l \,|$.*

Ισχυρισμός 6.18. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν $|\, a_n \,| \to |\, l \,|$ τότε $a_n \to l \in \mathbb{R}$.*

Αντιπαράδειγμα 6.19. Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ δε συγκλίνει, ενώ η ακολουθία $|\, a_n \,|$ συγκλίνει, και είναι $|\, (-1)^n \,| \to 1$.

Συμπέρασμα 6.20. *Το αντίστροφο ισχύει μόνο αν η ακολουθία είναι μηδενική* [2].

Δηλαδή ισχύει το εξής:

[2] Μια ακολουθία λέγεται μηδενική όταν $a_n \to 0$

Πρόταση 6.21. $a_n \to 0$ *αν και μόνο αν* $|a_n| \to 0$.

Επίσης ισχύει:

Πρόταση 6.22. *Αν* $|a_n| \to l > 0$ *και η* a_n *συγκλίνει, τότε* $a_n \to l$ *ή* $-l$.

Πρόταση 6.23. *Αν* $a_n \to \infty$ *τότε* $\frac{1}{a_n} \to 0$.

Ισχυρισμός 6.24. *Αν* $a_n \to 0$ *τότε ισχύει ότι* $\frac{1}{a_n} \to \infty$.

Αντιπαράδειγμα 6.25. Η ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ είναι μηδενική, αφού

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$$

οπότε και $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$. Όμως η ακολουθία $\frac{1}{a_n} = \frac{n}{(-1)^n}$ δεν είναι φραγμένη (ούτε και μονότονη), οπότε δε συγκλίνει. Δε συγκλίνει ούτε κατ'ἐκδοχήν.

Γενικά ισχύει:

Πρόταση 6.26. *Αν* $a_n \to l$ *τότε* $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{l}$ *όπου* $l \neq 0$, *και αντίστροφα.*

Πρόταση 6.27. *Αν οι ακολουθίες* a_n, b_n *συγκλίνουν και είναι* $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $b_n \to b \in \mathbb{R}$, *τότε συγκλίνει και το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο τους, και είναι:*

$$\left\{ \begin{array}{c} a_n + b_n \to a + b \\ a_n b_n \to ab \\ \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \quad \text{αν επιπλέον } b_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } b \neq 0 \end{array} \right\}$$

Ισχυρισμός 6.28. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο των ακολουθιών a_n, b_n συγκλίνει, τότε και οι ακολουθίες a_n, b_n συγκλίνουν.*

Αντιπαράδειγμα 6.29. Οι ακολουθίες $a_n = (-1)^n$ και $b_n = -(-1)^n$ ΔΕΝ έχουν όριο, αλλά το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο τους συγκλίνει:

$$a_n + b_n = 0 \to 0$$

$$a_n b_n = -(-1)^{2n} = -1 \to -1$$

$$\frac{a_n}{b_n} = -1 \to -1$$

Παρατήρηση 6.30. *Η προηγούμενη πρόταση ισχύει ακόμα και όταν οι ακολουθίες αποκλίνουν στο άπειρο, με την προϋπόθεση όμως ότι οι ποσότητες $a + b$, ab, $\frac{a}{b}$ να μην είναι απροσδιόριστες μορφές του είδους* $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Αν όμως είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο των ακολουθιών a_n, b_n μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει στο άπειρο ή να μην υπάρχει.

Παρατήρηση 6.31. *Αν το πλήθος των όρων του αθροίσματος και του γινομένου είναι άπειρο, το συμπέρασμα της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύει, και οδηγούμαστε σε παράδοξα αποτελέσματα.*

Παράδειγμα 6.32. Έστω

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ το πλήθος όροι}} = n \cdot \frac{1}{n}$$

και είναι

$$\lim a_n = \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n} + \cdots + \lim \frac{1}{n} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

ενώ

$$\lim a_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

(που είναι και το σωστό)

Φτάσαμε δηλαδή στο εξής παράδοξο: $0 = 1$

Παράδειγμα 6.33. Έστω η ακολουθία

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

που γνωρίζουμε ότι $a_n \to e$.

Όμως αν υπολογίσουμε το όριο χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δύναμης, δηλαδή σαν το γινόμενο n παραγόντων, έχουμε

$$\begin{aligned}\lim a_n &= \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 \cdot 1 \cdots 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

οπότε καταλήγουμε στο παράδοξο: $e = 1$

Παράδειγμα 6.34. Έστω η ακολουθία

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = n$$

που γνωρίζουμε ότι $a_n \to +\infty$.

Όμως

$$\lim a_n = \lim\left(\sqrt[n]{n}\right) \cdot \lim\left(\sqrt[n]{n}\right) \cdots \lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

και έχουμε το παράδοξο αποτέλεσμα: $+\infty = 1$.

Ισχυρισμός 6.35. *Αν $a_n < b_n$ για κάθε n τότε $\lim a_n < \lim b_n$.*

Αντιπαράδειγμα 6.36. Έστω $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ και $b_n = \dfrac{1}{n}$. Έχουμε τότε $a_n < b_n$ και $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

Ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 6.37. *Αν* $a_n \leqslant b_n$ *για κάθε* $n > n_0$ *και* a_n, b_n *συγκλίνουν, τότε* $\lim a_n \leqslant \lim b_n$.

Πρόταση 6.38. *Αν για τις ακολουθίες* a_n, b_n, c_n *ισχύει* $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $\lim a_n = \lim c_n = a$ *τότε* $\lim b_n = a$.

Ισχυρισμός 6.39. *Αν για τις ακολουθίες* a_n, b_n, c_n *ισχύει* $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και οι ακολουθίες* a_n, c_n *συγκλίνουν, αλλά όχι στον ίδιο αριθμό, τότε και η ακολουθία* b_n *συγκλίνει.*

Αντιπαράδειγμα 6.40. Έστω $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $b_n = 2 + (-1)^n$, $c_n = 3 + \dfrac{1}{n}$. Ισχύει $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έχουμε $\lim a_n = 1$, $\lim c_n = 3$. Όμως

$$b_n = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός} \\ 3, & n \text{ άρτιος} \end{cases} = (1, 3, 1, 3, 1, 3, \ldots)$$

οπότε το $\lim b_n$ δεν υπάρχει.

Πρόταση 6.41. *Αν* $a_n \to +\infty$ $(-\infty)$ *τότε η* a_n *ΔΕΝ είναι άνω (κάτω) φραγμένη. Είναι όμως κάτω (άνω) φραγμένη.*

Ισχυρισμός 6.42. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η ακολουθία* a_n *ΔΕΝ είναι άνω (κάτω) φραγμένη, τότε* $a_n \to +\infty$ $(-\infty)$.

Αντιπαράδειγμα 6.43. Η ακολουθία

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{2}(1 + (-1)^n) \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ περιττός} \\ n, & n \text{ άρτιος} \end{cases} \\ &= (0, 2, 0, 4, 0, 6, \ldots) \end{aligned}$$

δεν είναι άνω φραγμένη και δεν αποκλίνει στο $+\infty$, γιατί οι υποακολουθίες των περιττών όρων και των άρτιων όρων έχουν διαφορετικά όρια: $a_{2n-1} \to 0$ και $a_{2n} \to +\infty$.

Αντιπαράδειγμα 6.44. Η ακολουθία $a_n = n(-1)^n$ δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένη, και δεν έχει όριο. Επίσης δεν είναι ούτε μονότονη.

Συμπέρασμα 6.45. *Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει. Ισχύει όμως το εξής:*

Κάθε ακολουθία που ΔΕΝ είναι άνω (κάτω) φραγμένη έχει τουλάχιστον μια υπακολουθία που αποκλίνει στο $+\infty$ $(-\infty)$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε τις υπακολουθίες

$$a_{2k} = 2k(-1)^{2k} = 2k \to +\infty$$

και

$$a_{2k+1} = (2k+1)(-1)^{2k+1} = -(2k+1) \to -\infty$$

Θεώρημα 6.46. *[Bolzano-Weierstrass].*

Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. [3]

Ισχυρισμός 6.47. *Αν μια ακολουθία δεν είναι φραγμένη, τότε δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Αντιπαράδειγμα 6.48. Η ακολουθία

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{2}(1 + (-1)^n) \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ περιττός} \\ n, & n \text{ άρτιος} \end{cases} \\ &= (0, 2, 0, 4, 0, 6, \ldots) \end{aligned}$$

[3] Το θεώρημα αυτό διατυπώνεται ισοδύναμα και ως εξής: Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει πάντα ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης. Πολλές φορές στη βιβλιογραφία αναφέρεται και σαν ιδιότητα Bolzano-Weierstrass για τις ακολουθίες. Χρησιμοποιώντας την, αποδεικνύεται και η αντίστοιχη ιδιότητα Bolzano-Weierstrass για τα σύνολα: Κάθε φραγμένο και άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει πάντα ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης. Βλέπε [15], σελ.82 και σελ.84.

δεν είναι φραγμένη αλλά έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (την υπακολουθία των περιττών όρων).

Προφανώς, αν μια ακολουθία δεν είναι φραγμένη, μπορεί και να μην έχει καμμία συγκλίνουσα υπακολουθία.

Παράδειγμα 6.49. Η ακολουθία

$$\begin{aligned} a_n &= -n(-1)^n \\ &= \begin{cases} n, & n \text{ περιττός} \\ -n, & n \text{ άρτιος} \end{cases} \\ &= (1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots) \end{aligned}$$

δεν είναι φραγμένη και δεν έχει συγκλίνουσες υπακολουθίες.

Πρόταση 6.50. *Μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στον ίδιο αριθμό.*

Ισχυρισμός 6.51. *Αν μια ακολουθία έχει άπειρες υπακολουθίες που συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό τότε η ακολουθία συγκλίνει σε αυτό τον αριθμό.*

Αντιπαράδειγμα 6.52. Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη και επιπλέον έχει άπειρες υπακολουθίες που συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό, τις: $a_{2k} \to 1$, $a_{4k} \to 1$, $a_{6k} \to 1, \ldots$

Όμως η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ δε συγκλίνει γιατί οι υπακολουθίες των περιττών όρων συγκλίνουν σε διαφορετικό αριθμό: $a_{2k+1} \to -1$, $a_{4k+1} \to -1$, $a_{6k+1} \to -1, \ldots$

Παρατήρηση 6.53. *Η έκφραση "κάθε υπακολουθία" δεν είναι συνώνυμη με την έκφραση "άπειρες υπακολουθίες". Η πρώτη έκφραση σημαίνει ΟΛΕΣ οι υπακολουθίες, ενώ η δεύτερη έκφραση αναφέρεται σε ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΟΛΟΥ.*

Οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι. Αν αφαιρέσουμε από αυτούς, τους άρτιους - που είναι άπειροι - θα μείνουν πάλι άπειροι, οι περιττοί. Και τα δύο σύνολα (άρτιοι - περιττοί) είναι άπειρα, και μάλιστα αριθμήσιμα το πλήθος, όπως και το σύνολο των φυσικών.

Άπειρο με άπειρο όμως έχει διαφορά. Αν αφαιρέσουμε τους άπειρους ρητούς από τους άπειρους πραγματικούς έχουμε πάλι άπειρο σύνολο αριθμών, τους άρρητους, οι οποίοι είναι όμως πολύ περισσότεροι από τους ρητούς γιατί σε αντίθεση με αυτούς είναι υπεραριθμήσιμοι σε πλήθος.

Η πράξη της αφαίρεσης $(\infty) - (\infty)$ *δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη (απροσδιόριστη) γι' αυτό και έχουμε τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.*

Ισχυρισμός 6.54. *Το όριο μιας ακολουθίας ανήκει στο σύνολο τιμών της.*

Αντιπαράδειγμα 6.55. Η ακολουθία των δεκαδικών (ρητών) προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$, ο οποίος είναι άρρητος :

$$a_n = \frac{\left[10^n \sqrt{2}\right]}{10^n} \tag{6.2}$$

με τιμές

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...
1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421	...

έχει σύνολο τιμών ένα υποσύνολο του συνόλου των ρητών, συγκλίνει όμως στο $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Συμπέρασμα 6.56. *Το όριο μιας ακολουθίας δεν ανήκει κατ' ἀνάγκη στο σύνολο τιμών της.*

Παρατήρηση 6.57. *Αν μια ακολουθία* a_n *στοιχείων ενός συνόλου Α συγκλίνει, τότε η ακολουθία* a_n *είναι βασική (ακολουθία Cauchy). Όμως κάθε βασική ακολουθία* a_n *στοιχείων ενός συνόλου Α δε συγκλίνει πάντα μέσα στο Α. Συγκλίνει μέσα στο σύνολο Α μόνο αν το Α είναι πλήρες. Πρόκειται για το κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών του*

Cauchy, που ισχύει στο διατεταγμένο και πλήρες σώμα των πραγματικών αριθμών, το οποίο μαζί με την αρχιμήδεια ιδιότητα (για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n > a$) αποτελούν αξιώματα ισοδύναμα με το αξίωμα της ύπαρξης του ελάχιστου άνω φράγματος για κάθε μη κενό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Όταν τα δύο πρώτα είναι αξιώματα το τρίτο είναι πρόταση και αντιστρόφως.

Όμως το σώμα των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$, ενώ είναι αρχιμήδειο σώμα δεν ισχύει σε αυτό το κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών του Cauchy, και άρα δεν είναι πλήρες σώμα. Αυτό σημαίνει ότι στο $\mathbb{Q}$, κάθε ακολουθία ρητών που συγκλίνει σε ρητό είναι βασική, αλλά κάθε βασική ακολουθία ρητών δε συγκλίνει πάντα σε ρητό.[4]

[4]Βλέπε 15, σελ.61-62.

Κεφάλαιο 7

ΟΡΙΑ

Πρόταση 7.1. *Αν* $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$[1] *τότε* $f(x) > 0$ *σε μια περιοχή του* x_0.

Ισχυρισμός 7.2. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν* $f(x) > 0$ *σε μια περιοχή του* x_0 *τότε* $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$.

Αντιπαράδειγμα 7.3. Η συνάρτηση

$$f(x) = (x-1)^2 > 0 \tag{7.1}$$

με $x \neq 1$, όμως είναι $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$ και όχι > 0.

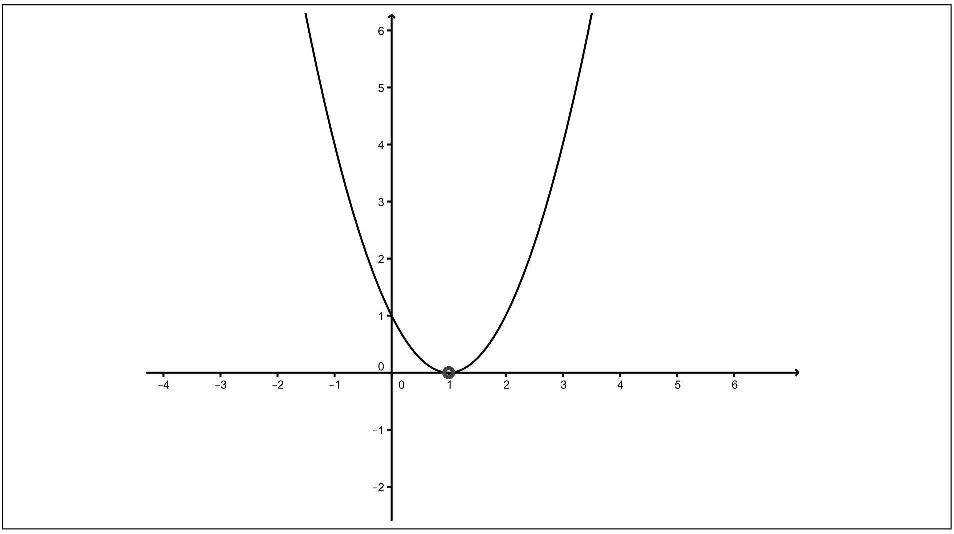
Αντιπαράδειγμα 7.4. Επίσης, για τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{αν } x < 2 \\ 4-x, & \text{αν } x \geqslant 2 \end{cases} \tag{7.2}$$

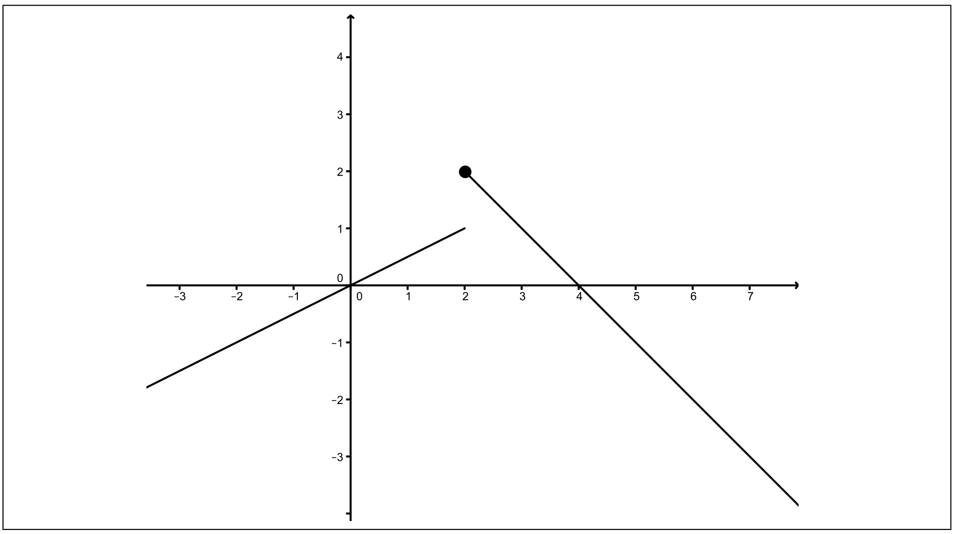
έχουμε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,3)$, ενώ το $\lim_{x\to 2} g(x)$ ΔΕΝ υπάρχει.

Συμπέρασμα 7.5. *Το σωστό είναι πως αν* $f(x) > 0$ *σε μια περιοχή του* x_0 *τότε το* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \geqslant 0$ *ή ΔΕΝ υπάρχει.*

[1]Φυσικά, έχουμε το ίδιο συμπέρασμα και όταν είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Δηλαδή έχουμε $f(x) > 0$ σε μια περιοχή του x_0.



Σχήμα 7.1: $f(x) = (x-1)^2$ με $x \neq 1$



Σχήμα 7.2: $g(x) = \frac{x}{2},$ αν $x < 2$ και $4 - x,$ αν $x \geqslant 2$

Πρόταση 7.6. *Έστω $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Αν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, υπάρχουν στο $\mathbb{R}$, τότε και τα όρια*

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)]$$
$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$$

υπάρχουν στο $\mathbb{R}$. Αν επιπλέον $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ τότε υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$.

Ισχυρισμός 7.7. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν, καθώς το $x \to x_0$, υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο του αθροίσματος, του γινομένου, ή του πηλίκου δύο συναρτήσεων, τότε υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ και τα επιμέρους όρια καθεμίας εκ των δύο αυτών συναρτήσεων.*

Αντιπαράδειγμα 7.8. Δίνονται οι συναρτήσεις[2]

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \tag{7.3}$$

και

$$g(x) = -\frac{|x|}{x} \tag{7.4}$$

με $x \in \mathbb{R}^*$.

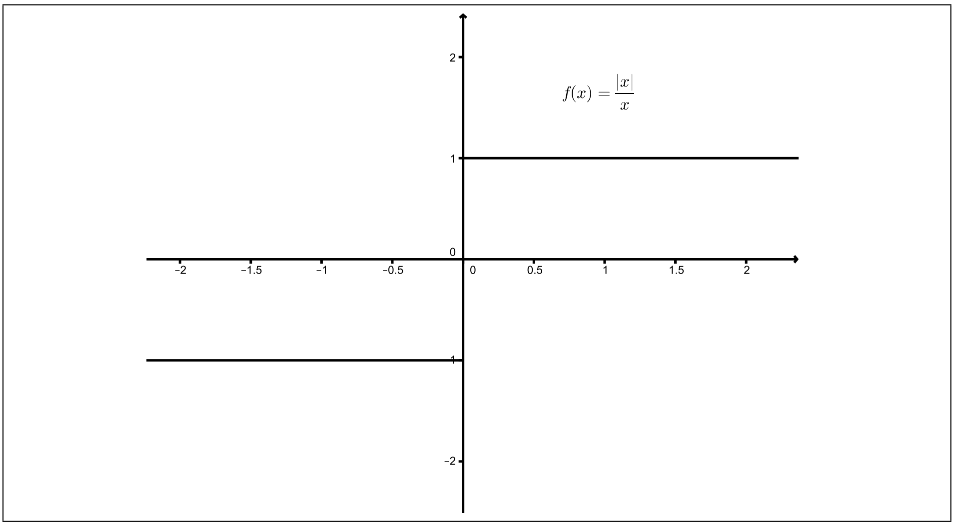
Είναι $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) + g(x)] = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) \cdot g(x)] = -1$, $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = -1$ ενώ τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ΔΕΝ υπάρχουν.

Ισχυρισμός 7.9. *Τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ μπορεί να υπάρχουν ενώ το όριο*

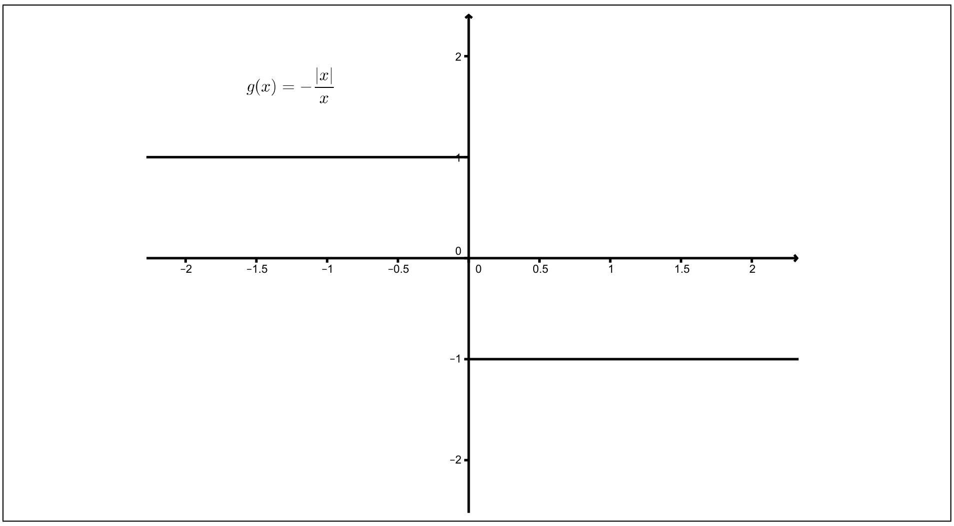
$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)]$$

να μην υπάρχει!

[2]Είναι η λεγόμενη και συνάρτηση προσήμου του x και συμβολίζεται $sgn(x)$ από τη λέξη signum. Αυτό γιατί για $x > 0$ είναι $f(x) = 1$ ενώ για $x < 0$ είναι $f(x) = -1$.



Σχήμα 7.3: $f(x) = \frac{|x|}{x}$



Σχήμα 7.4: $f(x) = -\frac{|x|}{x}$

Αντιπαράδειγμα 7.10. Είναι

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$$

με $x \in [1, +\infty)$, και

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$$

με $x \in (-\infty, 1]$ ενώ το

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}\right)$$

δεν υπάρχει, αφού η παράσταση $\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}\right)$ ορίζεται μόνο για $x = 1$, οπότε δεν υπάρχει περιοχή $\cup(1, \delta)$ με δ θετικό γύρω από το $x = 1$ ώστε να έχει νόημα το παραπάνω όριο.

Παρατήρηση 7.11. *Εδώ φαίνεται ότι έχουμε μια εξαίρεση, δηλαδή ένα αντιπαράδειγμα για την προηγούμενη πρόταση. 'Ομως δεν πρόκειται για κάτι τέτοιο, αφού οι δύο συναρτήσεις δεν ορίζονται στην ίδια περιοχή του $x_0 = 0$, το οποίο όμως είναι σημείο συσσώρευσης των πεδίων ορισμού και των δύο συναρτήσεων.*

Παρατήρηση 7.12. *Επειδή οι έννοιες της συνέχειας, της παραγώγισης, και της ολοκλήρωσης περιέχουν την έννοια του ορίου, οι ιδιότητες και τα προβλήματα που παρουσιάζει αυτό, μεταφέρονται και για αυτές τις έννοιες αντίστοιχα.*

Πρόταση 7.13. *Αν*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

τότε

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$$

Ισχυρισμός 7.14. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν* $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$ *τότε* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Αντιπαράδειγμα 7.15. Για τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \qquad \text{με } x \in \mathbb{R}^*$$

ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 1$ ενώ το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Συμπέρασμα 7.16. *Το αντίστροφο ισχύει μόνο αν $\ell = 0$, δηλαδή:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$$

Ισχυρισμός 7.17. *Αν*

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \ell \in \mathbb{R}$$

τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \text{ ή } -\ell$$

Αντιπαράδειγμα 7.18. Για την

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 1$ ενώ το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Συμπέρασμα 7.19. *Αν*

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \ell \in \mathbb{R}$$

τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \text{ ή } -\ell \text{ ή ΔΕΝ υπάρχει}$$

Πρόταση 7.20. *(ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ)*
Αν x_0 σημείο συσσώρευσης του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, και για τις συναρτήσεις $h(x), f(x), g(x)$ που είναι ορισμένες[3] *στο A ισχύει ότι*

$$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

για κάθε x που ανήκει στο A και επιπλέον

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

τότε υπάρχει το όριο της f και είναι

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

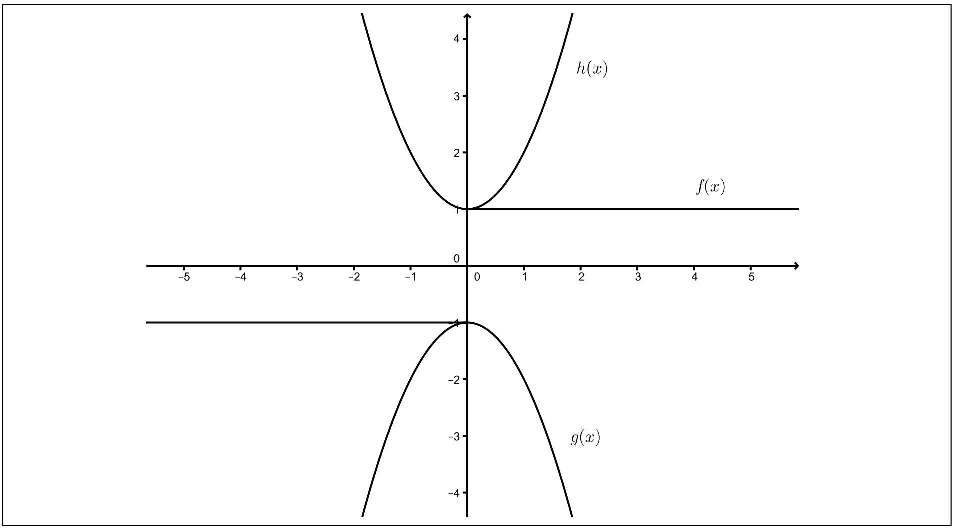
Παρατήρηση 7.21. *Το συμπέρασμα του κριτήριου της παρεμβολής ισχύει και όταν οι ανισότητες είναι γνήσιες δηλαδή όταν: $h(x) < f(x) < g(x)$. Αυτό συμβαίνει γιατί $h(x) < f(x) < g(x) \Rightarrow h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ και είναι πιο εύκολη η ύπαρξη της γνήσιας ανισότητας (ισχυρότερη). Επιπλέον, το κριτήριο της παρεμβολής ισχύει ακόμα και όταν το x τείνει στο άπειρο ή το όριο ισούται με άπειρο.*

Ισχυρισμός 7.22. *Αν για τις συναρτήσεις $h(x)$, $f(x)$, $g(x)$ που είναι ορισμένες σε μια περιοχή του $x_0 \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ για κάθε x που ανήκει σε αυτή την περιοχή, και $\lim_{x \to x_0} h(x) = m$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ με $m < \ell$, τότε $m \leqslant \lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \ell$.*

Αντιπαράδειγμα 7.23. Έστω $h(x) = -x^2 - 1$, $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $g(x) = x^2 + 1$ με $x \in \mathbb{R}^*$, και ισχύει $h(x) < f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Έχουμε $\lim_{x \to 0} h(x) = -1$, $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$, ενώ $\lim_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

[3] Σε πολλά βιβλία διαβάζουμε ότι οι 3 συναρτήσεις ορίζονται σε μια περιοχή του x_0 χωρίς να αναφέρεται ότι αυτό είναι σημείο συσσώρευσης. Αυτό βέβαια σημαίνει έχουμε *διάστημα* της μορφής $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ οπότε και το x_0 αποτελεί σημείο συσσώρευσης αυτού.



Σχήμα 7.5: Αντιπαράδειγμα για το κριτήριο της παρεμβολής

Συμπέρασμα 7.24. *Η ανισότητα* $m \leqslant \lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \ell$ *ισχύει με την προϋπόθεση ότι υπάρχει το* $\lim_{x\to x_0} f(x)$. *Επιπλέον, αν* $m = \ell$ *τότε συνεπάγεται η ύπαρξη του ορίου χωρίς να απαιτείται από την υπόθεση,* [4] *και είναι* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Πρόταση 7.25. *(΄ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)*
Αν x_0 *σημείο συσσώρευσης του* $A \subseteq \mathbb{R}$, *συνάρτηση* $g : A \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$ *και* $f : B \to \mathbb{R}$ *συνεχής στο* ℓ, *με* $g(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ *και* $\ell \in B$, *τότε*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\ell)$$

[4] Αυτό συμβαίνει λόγω της ισχύος του κριτήριου παρεμβολής, η υπόθεση του οποίου δεν περιέχει την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to x_0} f(x)$ παρά μόνο ότι η f ορίζεται στο υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών, και ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Ισχυρισμός 7.26. *Ισχύει πάντα ότι*

$$\lim_{x\to x_0} f\left(g\left(x\right)\right) = f\left(\lim_{x\to x_0} g\left(x\right)\right)$$

Αντιπαράδειγμα 7.27. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f\left(x\right) = \frac{lnx}{x-1}, \quad \text{με } x \in \left(0,1\right) \cup \left(1,+\infty\right) \tag{7.6}$$

και

$$g\left(x\right) = x+1, \quad \text{με } x \in \mathbb{R} \tag{7.7}$$

Έχουμε

$$f\left(g\left(x\right)\right) = \frac{ln\left(x+1\right)}{x}, \quad \text{με } x \in \left(-1,0\right) \cup \left(0,+\infty\right)$$

και

$$\lim_{x\to 0} f\left(g\left(x\right)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{ln\left(x+1\right)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 1$$

ενώ

$$f\left(\lim_{x\to 0} g\left(x\right)\right) = f\left(1\right)$$

το οποίο όμως δεν ορίζεται.

Αντιπαράδειγμα 7.28. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$h\left(x\right) = \begin{cases} \frac{sinx}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases} \tag{7.8}$$

και

$$k\left(x\right) = 2x \quad \text{με } x \in \mathbb{R} \tag{7.9}$$

Έχουμε

$$h\left(k\left(x\right)\right) = \begin{cases} \frac{sin(2x)}{2x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

και

$$\lim_{x\to 0} h\left(k\left(x\right)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{sin\left(2x\right)}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 1$$

ενώ

$$h\left(\lim_{x\to 0} k\left(x\right)\right) = h\left(0\right) = 3$$

και είναι διαφορετικό.

Παρατήρηση 7.29. *Στο 1ο αντιπαράδειγμα αν*

$$x_0 \neq 0, -1^+$$

(τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η $f(g(x))$*), τότε*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a \neq 1, 0^+$$

(δηλαδή το $\lim_{x \to x_0} g(x)$ *ανήκει στο πεδίο ορισμού της* $f(x)$*), οπότε*

$$f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(a)$$

ορίζεται πλέον.
Έστω $x_0 = 2$ *τότε*

$$f\left(\lim_{x \to 2} g(x)\right) = f(g(2)) = f(3) = \frac{ln3}{2}$$

και

$$\lim_{x \to 2} f(g(x)) = \lim_{x \to 2} \frac{ln(x+1)}{x} = \frac{ln3}{2}$$

δηλαδή είναι ίσα.

Στο 2ο αντιπαράδειγμα το $x_0 = 0$ *ανήκει στο πεδίο ορισμού της* $h(k(x))$*, άρα δεν είναι η αιτία της μη ισχύος της ισότητας. Αν όμως υποθέσουμε ότι η* $h(k(x))$ *είναι συνεχής, δηλαδή έχουμε*

$$h(k(x)) = \begin{cases} \frac{sin(2x)}{2x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

τότε $h\left(\lim_{x \to 0} k(x)\right) = h(0) = 1 = \lim_{x \to 0} h(k(x))$.

Ισχυρισμός 7.30. *Το όριο μιας συνάρτησης στο* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ΔΕΝ υπάρχει, αν αυτή ΔΕΝ ορίζεται σε κανένα διάστημα της μορφής* $\cup(x_0, a)$ *με* $a \in \mathbb{R}$, $a > o$.

Αντιπαράδειγμα 7.31. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x, \text{ με } x = \frac{1}{k} \text{ όπου } k \in \mathbb{Z}^* \text{ δηλαδή}$$
$$x \in A = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3,}, -\frac{1}{4}, \cdots\right\} \cup \left\{\cdots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\} \quad (7.10)$$

η οποία ΔΕΝ ορίζεται σε καμμία περιοχή της μορφής $\cup(0, a)$ με $a \in \mathbb{R}$ και $a > 0$, δηλαδή ΔΕΝ υπάρχει διάστημα γύρω απο το μηδέν, οσοδήποτε "κοντά" και αν πλησιάσουμε στο οποίο να ορίζεται. Όμως το όριο στο μηδέν υπάρχει και είναι $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, γιατί το μηδέν είναι σημείο συσσώρευσης[5] του συνόλου A, και όλα τα άλλα σημεία είναι μεμονωμένα.[6]

ΠΡΟΣΟΧΗ!
Οι παρακάτω δύο εκφράσεις δεν είναι ταυτόσημες:

- Η συνάρτηση ορίζεται σε περιοχή της μορφής $\cup(x_0, a)$ με $a \in \mathbb{R}$ και $a > 0$, οσοδήποτε "κοντά" στο σημείο x_0.
- Σε κάθε περιοχή της μορφής $\cup(x_0, a)$ με $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Το όριο έχει νόημα αρκεί να ισχύει η 2η έκφραση, δηλαδή αρκεί να υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης οσοδήποτε "κοντά" κι αν πλησιάσουμε στο x_0. Δηλαδή αρκεί το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού.

Στο παράδειγμά μας η f ορίζεται σε σύνολα (όχι διαστήματα)[7] γύρω από το μηδέν, που περιέχουν όμως άπειρους όρους του πεδίου

[5] Το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου Α (δεν ανήκει απαραίτητα στο Α), αν σε κάθε περιοχή του x_0 υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \neq x_0$ με $x \in A$ (και άρα άπειρα).

[6] Το $x_0 \in A$ είναι μεμονωμένο σημείο του συνόλου Α, αν υπάρχει περιοχή του x_0 ώστε το μόνο κοινό στοιχείο με το Α είναι το x_0.

[7] Ένα υποσύνολο Α του $\mathbb{R}$ είναι διάστημα, τότε και μόνο, όταν περιέχει κάθε x που βρίσκεται μεταξύ 2 οποιονδήποτε στοιχείων του Α.
(Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα $\Longleftrightarrow \forall x \; : \; x_1 < x < x_2, \; x_1, x_2 \in A \Rightarrow x \in A$)

ορισμού.

Πρόταση 7.32. *(΄ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΡΙΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ)*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(n) = \ell$$

με

$$x \in \mathbb{R}_+, \; n \in \mathbb{N}, \; \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Ισχυρισμός 7.33. *Ισχύει και το αντίστροφο.*
Δηλαδή, αν $\lim_{n \to +\infty} f(n) = \ell$ *τότε* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Αντιπαράδειγμα 7.34. Υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε η ακολουθία $f(n)$ να συγκλίνει, ενώ η συνάρτηση $f(x)$ όχι!

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases} \tag{7.11}$$

και ενώ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ΔΕΝ υπάρχει, έχουμε $\lim_{n \to +\infty} f(n) = 1$.

Κεφάλαιο 8

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

►***Υπάρχει συνάρτηση που είναι συνεχής σε 1 μόνο σημείο.***

Παράδειγμα 8.1. Η συνάρτηση[1]

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \text{ με } 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{8.1}$$

είναι συνεχής μόνο στο $x = \frac{1}{2}$, και λαμβάνει κάθε τιμή του συνόλου τιμών $[0, 1]$ ακριβώς 1 φορά. Είναι δηλαδή "1-1' συνάρτηση. Όμως δεν είναι σε κανένα υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της μονότονη!

Παράδειγμα 8.2. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{8.2}$$

είναι συνεχής μόνο στο $x = 0$.

Παρατήρηση 8.3. *Μια συνάρτηση της μορφής*

$$f(x) = \begin{cases} a(x), & x \in \mathbb{Q} \\ b(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{8.3}$$

είναι ασυνεχής παντού εκτός από τις ρίζες της εξίσωσης $a(x) = b(x)$. (Με την προϋπόθεση ότι οι 2 κλάδοι της f ορίζονται)

---

[1] Βλέπε 15, σελ.203.

►***Υπάρχει συνάρτηση που ΔΕΝ είναι συνεχής σε κανένα*** $x_0 \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 8.4. Η συνάρτηση "Dirichlet":

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει ακολουθία ρητών (a_n), ώστε $a_n \to x_0 \in \mathbb{R}$,. Επίσης το σύνολο των αρρήτων είναι πυκνο στο $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει ακολουθία αρρήτων (b_n) ώστε $b_n \to x_0 \in \mathbb{R}$. Έχουμε τότε $f(a_n) = 1$, και $f(b_n) = 0$ και είναι διαφορετικά. Αυτό σημαίνει ότι η f δεν έχει σε κανένα σημείο x_0 όριο, οπότε δεν είναι και πουθενά συνεχής.

►***Υπάρχει συνάρτηση συνεχής σε άπειρα σημεία, και ασυνεχής επίσης σε άπειρα σημεία.***

Παράδειγμα 8.5. Η συνάρτηση[2]

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x > 0 \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{N},\ (m, n) = 1 \end{cases} \tag{8.4}$$

είναι συνεχής σε κάθε άρρητο και ασυνεχής σε κάθε ρητό.

Παράδειγμα 8.6. Η συνάρτηση 'ακέραιο' μέρος του $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = [x]$$

είναι ασυνεχής σε κάθε $k \in \mathbb{Z}$ αφού είναι $\lim\limits_{x\to k^-} [x] = k-1$ ενώ $\lim\limits_{x\to k^+} [x] = k$ και συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

[2]Βλέπε απόδειξη στο 4, σελ.124.

Πρόταση 8.7. *Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε και η $|f(x)|$ είναι συνεχής στο x_0.*

Ισχυρισμός 8.8. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν $|f(x)|$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε και η f είναι συνεχής στο x_0.*

Αντιπαράδειγμα 8.9. Δίνεται η

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{8.5}$$

για την οποία ισχύει $|f(x)| = 1 \quad$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και άρα συνεχής παντού σαν σταθερή συνάρτηση. Όμως το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχει, οπότε η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x = 0$.

Ακόμα χειρότερα, αν η f οριστεί ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{8.6}$$

τότε η $f(x)$ δεν είναι συνεχής πουθενά, ενώ η $|f(x)| = 1$ είναι συνεχής παντού.

Πρόταση 8.10. *Αν f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε και οι συναρτήσεις:* $\left.\begin{array}{c} (f+g)(x) \\ (f \cdot g)(x) \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) \\ (f \circ g)(x) \end{array}\right\}$ *είναι συνεχείς στο x_0.*
(Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται στο x_0)

Ισχυρισμός 8.11. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο ή η σύνθεση δύο συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση, τότε κάθεμια εκ των δύο συναρτήσεων είναι συνεχής επίσης.*

Δίνεται για κάθε περίπτωση ξεχωριστά:

- Για το άθροισμα $(f+g)(x)$:

  Αντιπαράδειγμα 8.12.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

  και

$$g(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

  Έχουμε $(f+g)(x) = x$ και είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ οι συναρτήσεις f και g ΔΕΝ είναι συνεχείς στο $x = 0$.

- Για το γινόμενο $(f \cdot g)(x)$:

  Αντιπαράδειγμα 8.13.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

  και

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

  οι οποίες ΔΕΝ είναι συνεχείς στο $x = 0$ ενώ η συνάρτηση

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin(2x)}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

  είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

  Παρατήρηση 8.14. *Επίσης, οι 2 συναρτήσεις αποτελούν παράδειγμα και για το άθροισμα:*

$$(f+g)(x) = \begin{cases} \frac{\sin x + sin(2x)}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

  το οποίο είναι συνεχής στο $x = 0$.

- Για το πηλίκο $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$:

Αντιπαράδειγμα 8.15.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

οι οποίες ΔΕΝ είναι συνεχείς στο $x = 0$ ενώ η συνάρτηση

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{2}{\cos x}, & x \neq \frac{k\pi}{2} \text{ όπου } k \in \mathbb{Z} \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x = 0$.

- Για τη σύνθεση $(f \circ g)(x)$:

Αντιπαράδειγμα 8.16.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

με

$$x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, και

$$g(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geqslant 0 \\ 1 - x, & x < 0 \end{cases}$$

η οποία είναι ασυνεχής στο $x = 0$, ενώ η σύνθεση

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x\sqrt{x^2 + 1}, & x \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2 - x}, & x < 0 \end{cases}$$

που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αντιπαράδειγμα 8.17. Ακόμα χειρότερα, οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} e, & x \in \mathbb{Q} \\ \pi, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι ασυνεχείς παντού, ενώ η

$$(f \circ g)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

είναι συνεχής παντού σαν σταθερή.

Θεώρημα 8.18. *(BOLZANO)*[3] *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και ισχύει ότι $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x) = 0$.*

- Αν κάποια από τις προϋποθέσεις δεν ισχύει, τότε δε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα.

  1. Αν η f ΔΕΝ είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε ΔΕΝ έχει απαραίτητα ρίζα στο (a, b).

     Παράδειγμα 8.19. Η συνάρτηση

     $$f(x) = \begin{cases} x - 3, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x - 1, & 2 < x \leqslant 3 \end{cases} \tag{8.7}$$

     ορίζεται στο $[1, 3]$, ισχύει ότι $f(1) \cdot f(3) = -2 < 0$, αλλά δεν είναι συνεχής στο $x = 2$, και δεν έχει ρίζα στο $(1, 3)$.

[3] Bernhard Bolzano

Παράδειγμα 8.20. Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & 1<x\leqslant 2 \\ -1, & x=1 \end{cases} \tag{8.8}$$

ορίζεται στο $[1,2]$, ισχύει ότι $f(1)\cdot f(2)=-1<0$, αλλά δεν είναι συνεχής στο άκρο $x=2$, και δεν έχει ρίζα στο $(1,2)$.

2. Αν για την f ΔΕΝ ισχύει ότι $f(a)\cdot f(b)<0$, τότε ΔΕΝ έχει απαραίτητα ρίζα στο (a,b).

   Παράδειγμα 8.21. Η συνάρτηση

$$f(x)=x, \quad \text{αν} \quad x\in[1,2] \tag{8.9}$$

   είναι συνεχής στο $[1,2]$, αλλά ισχύει ότι $f(1)\cdot f(2)=2>0$, και δεν έχει ρίζα στο $(1,2)$.

- Το αντίστροφο ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ.

  Η συνάρτηση μπορεί να έχει ρίζα αλλά να μην ισχύει καμμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος.

  Παράδειγμα 8.22. Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ x, & 2<x\leqslant 3 \end{cases} \tag{8.10}$$

  έχει 1 ρίζα στο $(0,3)$, αλλά δεν είναι συνεχής στο $[0,3]$ (ειναι ασυνεχής στο $x=2$), και ισχύει $f(0)\cdot f(3)=3>0$.

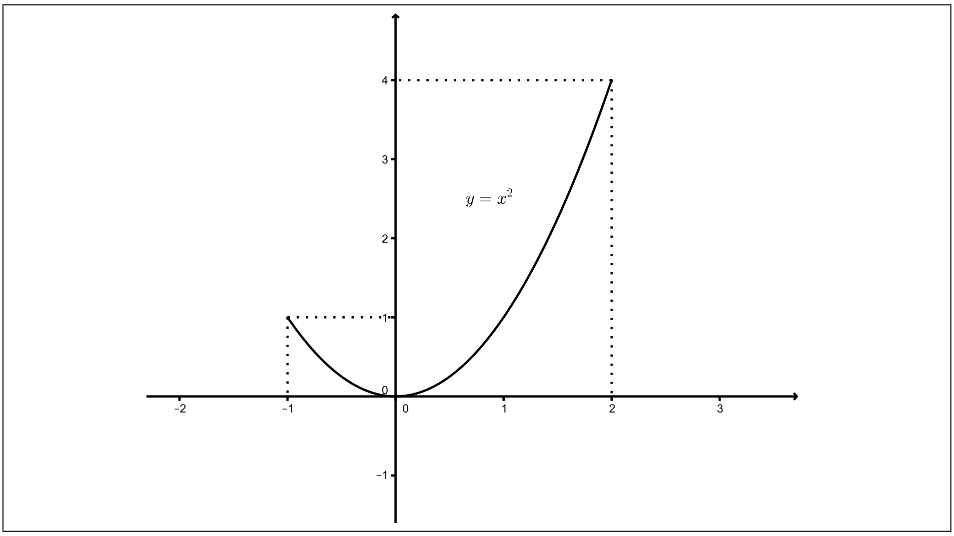
Θεώρημα 8.23. *(ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ)* [4]

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[a,b]$, με $f(a)\neq f(b)$, τότε για κάθε κ που βρισκεται ανάμεσα στις τιμές $f(a)$, $f(b)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x\in(a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x)=\kappa$.

[4] Μια διαφορετική διατύπωση είναι η εξής:
Αν η συνάρτηση f είναι στο διάστημα Δ των πραγματικών αριθμών συνεχής, τότε το σύνολο τιμών της f, το $f(\Delta)$ είναι επίσης διάστημα.

- Το ότι η συνεχής συνάρτηση f στο κλειστό $[a, b]$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, ΔΕ σημαίνει ότι κατάνάγκη παίρνει μόνο αυτές, δηλαδή ότι το σύνολο τιμών είναι το $[f(a), f(b)]$ ή το $[f(b), f(a)]$.

Παράδειγμα 8.24. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ με $x \in [-1, 2]$ είναι συνεχής, και έχουμε $f(-1) = 1 \neq 4 = f(2)$, οπότε εφαρμόζοντας το Θ.Ενδ.Τιμών συμπεραίνουμε ότι παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ του 1 και του 4. Όμως $f(0) = 0$ και το μηδέν δεν ανήκει στο $[f(-1), f(2)] = [1, 4]$. Βλέπουμε δηλαδή ότι $f([-1, 2]) = [0, 4] \neq [1, 4] = [f(-1), f(2)]$.



Σχήμα 8.1: $f(x) = x^2$ με $x \in [-1, 2]$

Παρατήρηση 8.25. *Το διάστημα που ορίζουν τα $f(a)$, $f(b)$ με*

$$f(a) < f(b)$$

δεν είναι το σύνολο τιμών της f στο κλειστό $[a, b]$, αλλά υποσύνολό του:

$$[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$$

– Θα είναι $[f(a), f(b)] = f([a,b])$ μόνο αν η f είναι συνεχής και επιπλέον είναι αύξουσα.

- Αν η συνάρτηση f έχει στο $[a,b]$ την «Ιδιότητα της Ενδιάμεσης Τιμής» [5], δηλαδή παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, ΔΕ συνεπάγεται απαραίτητα πως είναι και συνεχής στο $[a,b]$.

Παράδειγμα 8.26. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{8.11}$$

για τα $x \in \left[\dfrac{-2}{\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right]$ παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $f\left(\dfrac{-2}{\pi}\right) = -1$ και $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = 1$, και μάλιστα άπειρες φορές. Είναι συνεχής για κάθε $x \neq 0$, όμως ΔΕΝ είναι συνεχής στο $x = 0$ αφού το $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ ΔΕΝ υπάρχει.

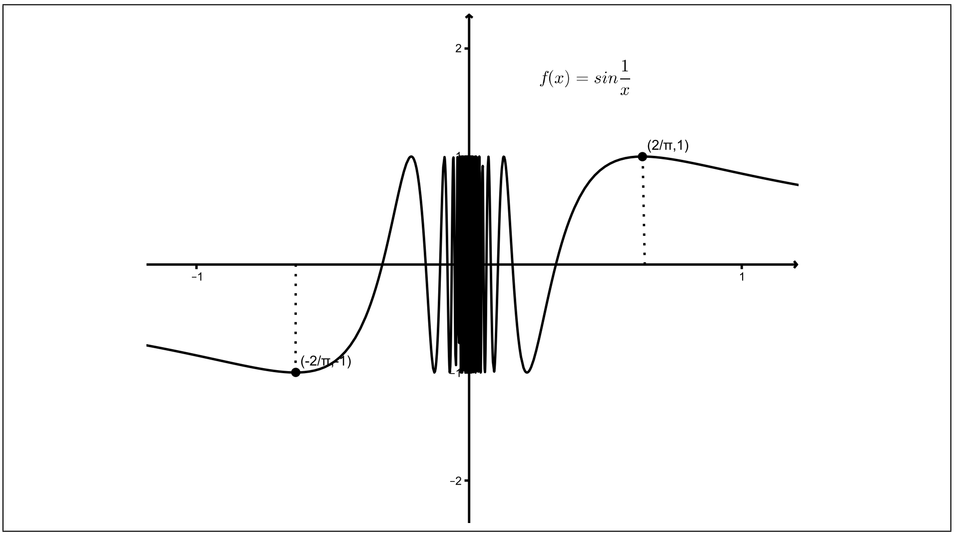
Παρατήρηση 8.27. *Η συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο $[a,b]$*

1. *αν έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών και είναι μονότονη στο $[a,b]$.* [6]
   ή

---

[5]Η συνάρτηση f έχει στο διάστημα Δ των πραγματικών αριθμών την «Ιδιότητα της Ενδιάμεσης Τιμής» αν ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος της Ενδιάμεσης Τιμής, δηλαδή αν η εικόνα κάθε υποδιαστήματος του Δ ως προς την f είναι διάστημα. Έτσι μπορούμε να έχουμε μια διαφορετική διατύπωση του θεωρήματος της Ενδιάμεσης Τιμής, που είναι η εξής: (Βλέπε σχετικά στο [17], τόμος *I*, σελ.183, ασκ.10-31)
Κάθε συνεχής συνάρτηση που ορίζεται σε ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών, έχει την «Ιδιότητα της Ενδιάμεσης Τιμής».
Βλέπε επιπλέον και την παρατήρηση 8.35 στη σελ. 123 σχετικά με παράδειγμα συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα που έχει σύνολο τιμών επίσης διάστημα, αλλά δεν έχει την «Ιδιότητα της Ενδιάμεσης Τιμής».

[6]Βλέπε σχετικά το πρόβλημα 8.38 στη σελ. 123 και την πρόταση 8.40 στη σελ. 125. Για απόδειξη βλέπε στο [26] στη σελ. 238.



Σχήμα 8.2: $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ αν $x \neq 0$, και 0 αν $x = 0$

2. *αν είναι φραγμένη και μονότονη στο* $[a, b]$. [7]

Θεώρημα 8.28. *(ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ)*
Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$, *τότε λαμβάνει* [8] *μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό.*

- Η προϋπόθεση της συνέχειας στα άκρα του διαστήματος είναι απαραίτητη για την ισχύ του θεωρήματος.

[7] Βλέπε σχετικά το αντιπαράδειγμα 8.52 στη σελ. 132. Για απόδειξη βλέπε στο [26] στη σελ. 258.

[8] Μπορεί να παρουσιάσει ολικά ακρότατα στο διάστημα αυτό σε πολλές τιμές του x.

Π.χ. η συνάρτηση $sinx$ στο διάστημα $[0, 4\pi]$, όπου $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1 = f_{max}$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -1 = f_{min}$.

Παράδειγμα 8.29. Η συνάρτηση

$$f(x) = x + 1 \quad \text{για} \quad x \in (0,1)$$

είναι συνεχής στο ανοιχτό $(0,1)$, χωρίς όμως να παρουσιάζει ολικά ακρότατα εκεί, και το σύνολο τιμών της είναι το διαστημα $(1,2)$. Αν ήταν όμως συνεχής στο κλειστό $[0,1]$ τότε θα είχε ολικό μέγιστο το 1 και ολικό ελάχιστο το 2. (Σύνολο τιμών το $[1,2]$)

- Το αντίστροφο ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ, δηλαδή μια συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει ολικό μέγιστο και ελάχιστο χωρίς να είναι συνεχής.

Παράδειγμα 8.30. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x+1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \tag{8.12}$$

παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με 3, ολικό ελάχιστο ίσο με 0, αλλά δεν είναι συνεχής στο $x = 1$, άρα μη συνεχής στο κλειστό $[0,2]$.

Πρόταση 8.31. *Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ τότε είναι και "1-1' στο Δ.*

Ισχυρισμός 8.32. *Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι "1-1', τότε είναι και γνησίως μονότονη.*

Αντιπαράδειγμα 8.33. Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

με

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

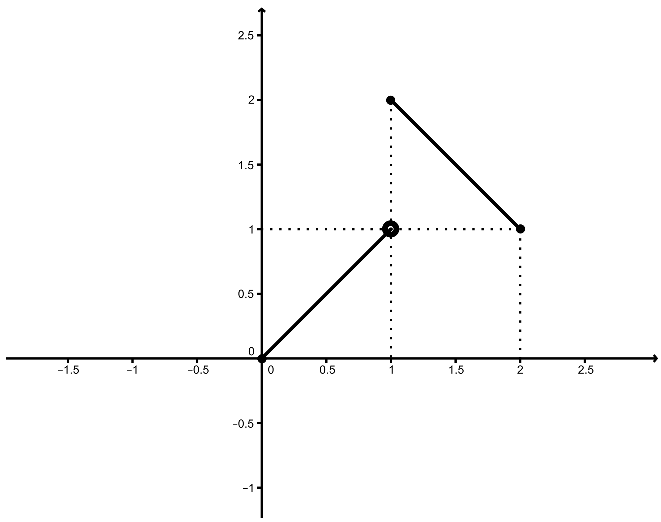
είναι "1-1' στο $\mathbb{R}^*$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη εκεί.

Κάποιος θα μπορούσε να υποθέσει ότι φταίει μόνο το Π.Ο. που είναι ένωση διαστημάτων, αλλά όπως φαίνεται στο αντιπαράδειγμα που ακολουθεί, ακόμα και αν η συνάρτηση είναι ’1-1’ σε διάστημα, και το σύνολο τιμών αυτής είναι επίσης διάστημα, δεν αρκεί για να είναι η συνάρτηση γνησίως μονότονη.

Αντιπαράδειγμα 8.34. Όμως η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x & ,\text{αν } 0 \leqslant x < 1 \\ -x+3 & ,\text{αν } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \tag{8.13}$$

είναι ‟1-1’ στο [0,2] αλλά όχι γνησίως μονότονη σε αυτό, αφού όπως φαίνεται και στο σχήμα, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1)$ και γνησίως φθίνουσα στο[1,2].



$$g(x) = \begin{cases} x & ,\text{αν } 0 \leqslant x < 1 \\ -x+3 & ,\text{αν } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Σχήμα 8.3:

Παρατήρηση 8.35. *Η προηγούμενη συνάρτηση με τύπο (8.13) έχει σύνολο τιμών το*

$$f([0,2]) = [f(0), f(1)] = [0,2]$$

το οποίο είναι διάστημα, χωρίς όμως να έχει την «Ιδιότητα της Ενδιάμεσης Τιμής» [9]*, αφού π.χ. στο διάστημα* $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ *το σύνολο τιμών της* f *είναι το* $[0,1) \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ *το οποίο δεν είναι διάστημα.*

Συμπέρασμα 8.36. *Το Δ πρέπει να'ναι διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων. Αυτός είναι ο λόγος που η*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

δεν είναι γνησίως μονότονη, ενώ για τη $g(x)$ *με τύπο (8.13) αυτό που φταίει είναι ότι δεν είναι συνεχής στο* $x = 1$.
Άρα:
Στην ιδιότητα "1-1" μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ, πρέπει να προσθέσω την ιδιότητα της συνέχειας στο Δ, ώστε η συνάρτηση να είναι και γνησίως μονότονη στο Δ.

Ισχύει η παρακάτω πρόταση:

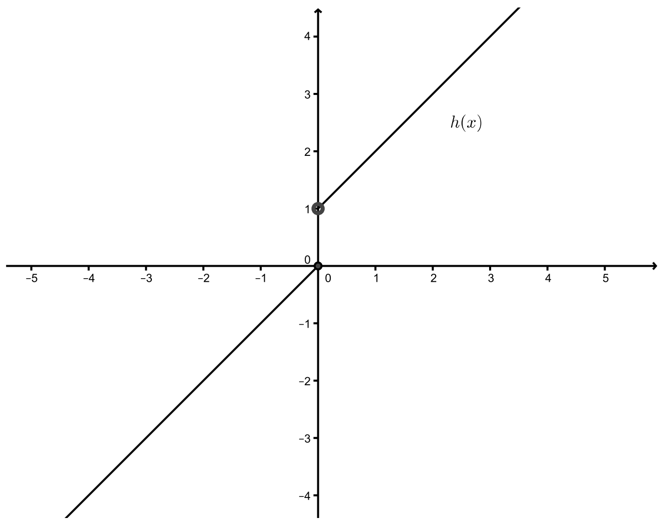
Πρόταση 8.37. *Αν μια συνάρτηση είναι "1-1" και συνεχής σ'ένα διάστημα* $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ *τότε είναι και γνησίως μονότονη στο Δ.*

Πρόβλημα 8.38. Πότε μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, είναι και συνεχής στο ίδιο διάστημα;

Πρόκειται για το αντίστροφο της πρότασης 8.37 στη σελίδα 123, το οποίο δεν ισχύει.

Παράδειγμα 8.39. Η συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} x & , \text{αν } x \leqslant 0 \\ x+1 & , \text{αν } x > 0 \end{cases} \tag{8.14}$$



$$h(x) = \begin{cases} x & ,\text{αν } x \leqslant 0 \\ x+1 & ,\text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Σχήμα 8.4:

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι συνεχής στο $x = 0$. Βλέπουμε ότι στο παράδειγμά μας το γεγονός πως το πεδίο ορισμού της $h(x)$ είναι το $\mathbb{R}$ (διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων) δεν είναι αρκετό για να μας παράγει τη συνέχεια της $h(x)$. Άρα αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, δε συνεπάγεται ότι θα είναι και συνεχής σάυτό.

ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΕΞΗΣ :

Πρόταση 8.40. [10]*Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, και το σύνολο τιμών αυτής είναι διάστημα, τότε η συνάρτηση θα είναι και συνεχής στο Δ.*

Έτσι καταλαβαίνουμε γιατί η $h(x)$ δεν είναι συνεχής:

Το σύνολο τιμών της $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$, δεν είναι διάστημα, αλλά ένωση διαστημάτων.

Παρατήρηση 8.41. *Μπορεί όμως μια συνάρτηση να είναι γνησίως μονότονη σε ένωση διαστημάτων, και, είτε το σύνολο τιμών αυτής είναι διάστημα είτε ένωση διαστημάτων, η συνάρτηση να είναι συνεχής.*

Παράδειγμα 8.42. Η συνάρτηση

$$k(x) = \begin{cases} x & ,\text{αν } x \leqslant 0 \\ x - 1 & ,\text{αν } x > 1 \end{cases} \tag{8.15}$$

είναι γνησίως αύξουσα (άρα και "1-1"), έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$, παρά το ότι αυτό δεν είναι διάστημα.

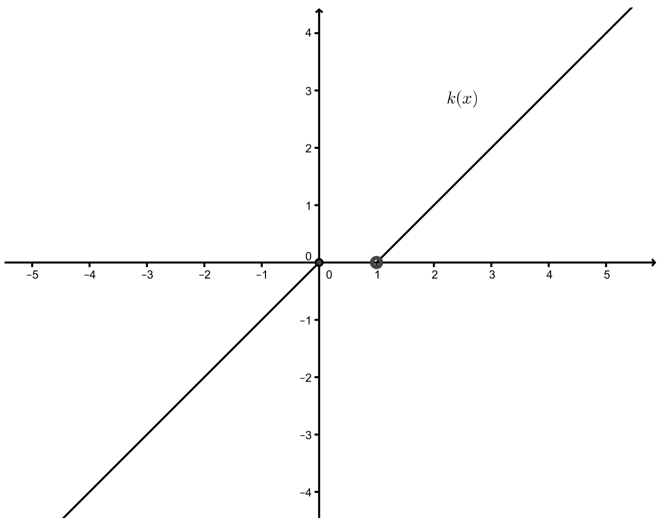
Παράδειγμα 8.43. Η συνάρτηση

$$s(x) = x \text{ με } x \leqslant 0 \text{ ή } x > 1 \tag{8.16}$$

είναι γνησίως αύξουσα, αλλά τόσο το πεδίο ορισμού όσο και το σύνολο τιμών αυτής είναι ένωση διαστημάτων, το $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$. Όμως είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

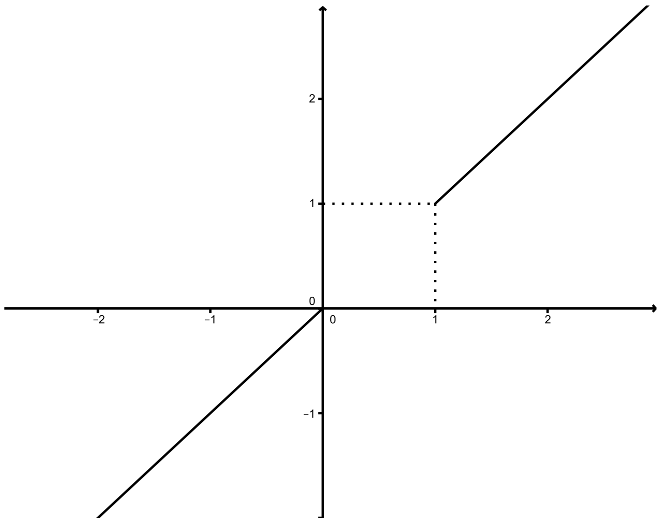
[9]Βλέπε σχετικά με την «Ιδιότητα της Ενδιάμεσης Τιμής» στη σελίδα 119.

[10]Μερικό αντίστροφο του Θεωρ.Ενδιάμεσων Τιμών. [Βλέπε απόδειξη στο 16, σελ.70]



$$k(x) = \begin{cases} x & ,\text{αν } x \leqslant 0 \\ x - 1 & ,\text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Σχήμα 8.5:



$s(x) = x$ με $x \leqslant 0$ ή $x > 1$

Σχήμα 8.6:

Πρόταση 8.44. *Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και μη σταθερή σε διάστημα Δ, τότε το $f(\Delta)$ είναι διάστημα.* [11]

►***Το αντίστροφο ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ***.

- Μπορεί να έχουμε απεικόνιση διαστήματος Δ σε διάστημα $f(\Delta)$, χωρίς η f να είναι συνεχής στο Δ:

  Παράδειγμα 8.45. Η συνάρτηση[12]

  $$f(x) = x - \lfloor x \rfloor \tag{8.17}$$

  με $x \in \Delta$=[0,3] , $f(\Delta)$=$[0,1)$ και σημεία ασυνέχειας τα $x = 1, 2, 3$.

  Παράδειγμα 8.46. Η συνάρτηση

  $$g(x) = \begin{cases} x & ,\text{αν } 0 \leqslant x < 1 \\ -x + 3 & ,\text{αν } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

  όπου $x \in \Delta$=[0,2], $g(\Delta) = [0, 2]$ και σημείο ασυνέχειας το $x = 1$.

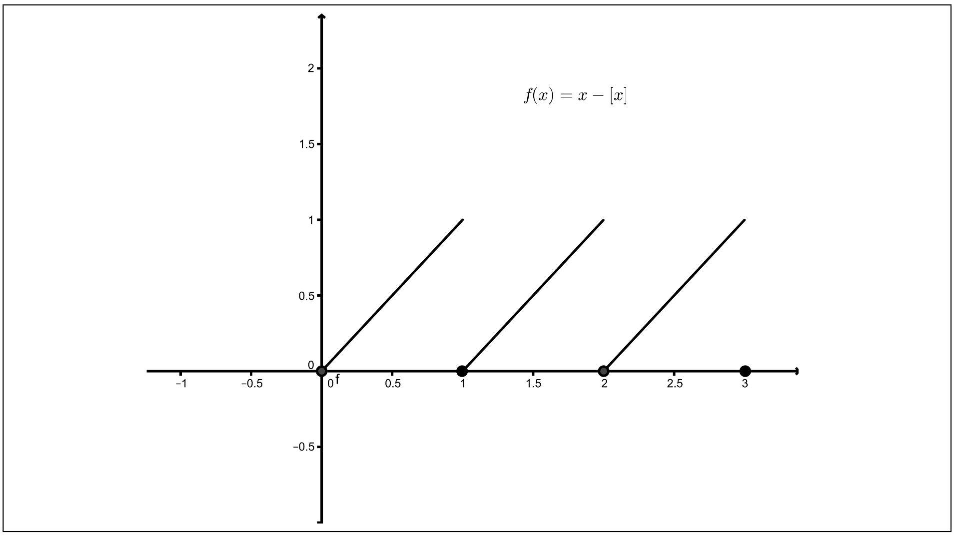
  Παράδειγμα 8.47. Η συνάρτηση

  $$h(x) = \begin{cases} x & , x \in [0, 1) \cup (1, 2) \\ 2 & , x = 1 \\ 1 & , x = 2 \end{cases} \tag{8.18}$$

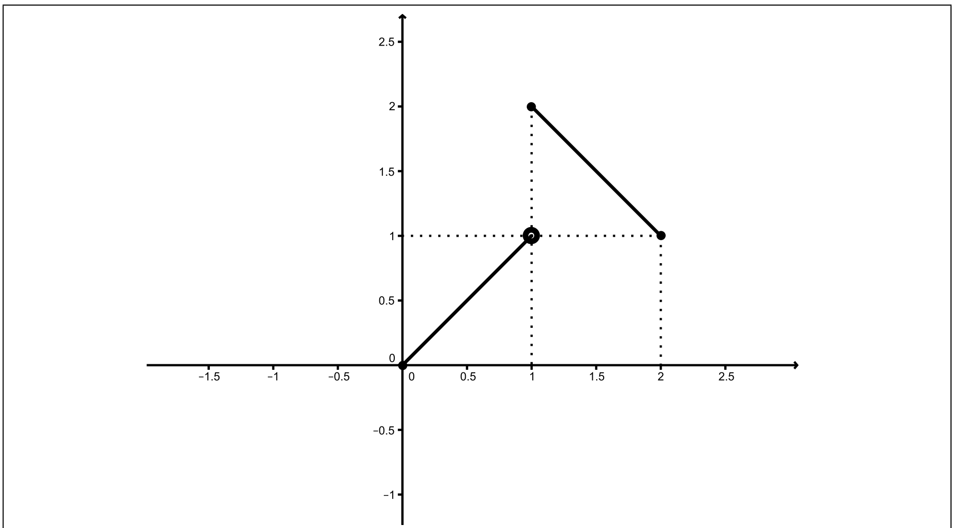
  όπου $x \in \Delta$=[0,2], $h(\Delta) = [0, 2]$ και σημεία ασυνέχειας τα $x = 1, 2$.

[11] Βλέπε σχετικά με την Ιδιότητα Ενδιάμεσης Τιμής και μια διαφορετική διατύπωση του Θ.Ενδιαμ.Τιμής την υποσημείωση στη σελ. 119. Η παρούσα πρόταση, είναι μια «εναλλακτική» διατύπωση αυτής.

[12] $\lfloor x \rfloor$ είναι το ακέραιο μέρος του x, "*floor* (x)" και ορίζεται ως εξής:
$\lfloor x \rfloor = k$, όπου $k \leqslant x < k + 1$ με $k \in \mathbb{Z}$

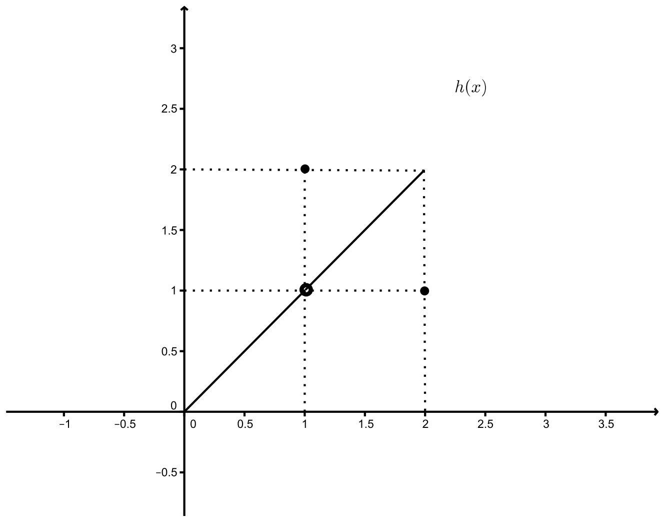


Σχήμα 8.7: $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$



$$g(x) = \begin{cases} x & ,\text{αν } 0 \leqslant x < 1 \\ -x+3 & ,\text{αν } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Σχήμα 8.8:



$$h(x) = \begin{cases} x & , x \in [0,1) \cup (1,2) \\ 2 & , x = 1 \\ 1 & , x = 2 \end{cases}$$

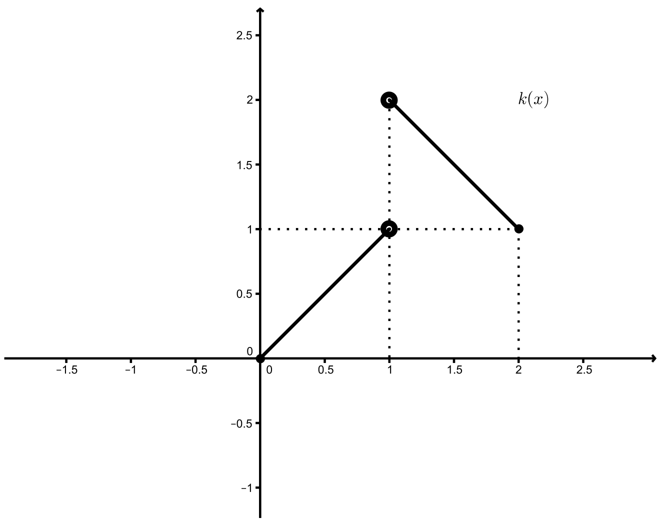
Σχήμα 8.9:

- Μπορεί η συνεχής f να απεικονίζεται στο διάστημα $f(\Delta)$ χωρίς το Δ να είναι διάστημα:

Παράδειγμα 8.48. Η συνάρτηση

$$k(x) = \begin{cases} x & ,0 \leqslant x < 1 \\ -x+3 & ,1 < x \leqslant 2 \end{cases} \tag{8.19}$$

Εδώ έχουμε $x \in \Delta$=[0,1) $\cup$ (1,2] και σύνολο τιμών $k(\Delta)$=[0,2). (Πρόκειται για παραλλαγή της $g(x)$ της προηγούμενης περίπτωσης. Εδώ είναι $x \neq 1$.)



$$k(x) = \begin{cases} x & ,0 \leqslant x < 1 \\ -x+3 & ,1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Σχήμα 8.10:

Η $k(x)$ είναι συνεχής, αφού το $x = 1$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, οπότε δεν έχει έννοια να μιλάμε για σύνέχεια εκεί. [13]

[13] Η έννοια της συνέχειας διαφέρει από τη χάραξη της συνεχούς γραμμής, δηλαδή από τη σχεδίαση του γραφήματος δίχως να σηκωθεί το μολύβι από το χαρτί. Άλλο σχετικό παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης με μη συνεχές γράφημα είναι η $f(x) = \frac{1}{x}$

Πρόταση 8.49. *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό $[a, b]$ τότε η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.*

- Υπάρχει συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο κλειστό $[a, b]$, αλλά όχι φραγμένη σε αυτό.

  Παράδειγμα 8.50. Η συνάρτηση

  $$f : [0, 1] \to [0, +\infty)$$

  με τύπο

  $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{8.20}$$

  δεν είναι φραγμένη στο $[0, 1]$, γιατί είναι συνεχής στο ανοιχτό $(0, 1]$ και όχι στο κλειστό $[0, 1]$.

  Παρατήρηση 8.51. *Αν η συνάρτηση είναι συνεχής σε ανοιχτό διάστημα, για να είναι φραγμένη, αρκει να υπάρχουν τα όρια στα άκρα του διαστήματος και να είναι πεπερασμένα.*

- Το αντίστροφο ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ. Υπάρχει συνάρτηση f που είναι φραγμένη στο κλειστό $[a, b]$, αλλά όχι συνεχής σε αυτό. [14]

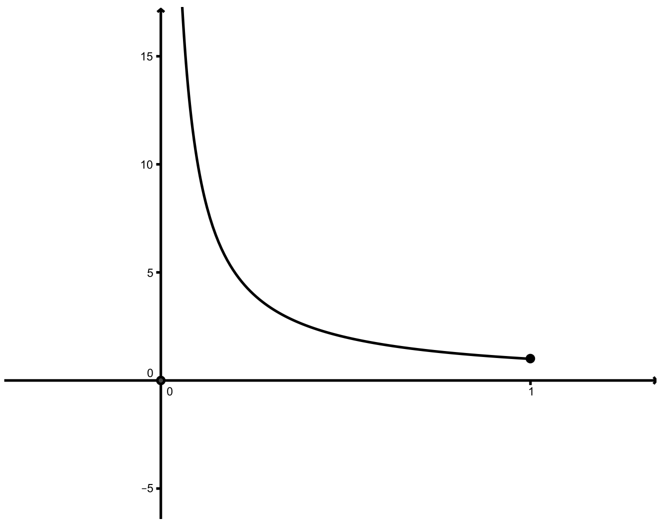
  Παράδειγμα 8.52. Η συνάρτηση $f : [1, 2] \to [1, 2]$ με τύπο

  $$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 1 \\ x, & 1 < x < 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases} \tag{8.21}$$

  είναι φραγμένη στο κλειστό $[1, 2]$ αλλά όχι συνεχής σε αυτό.

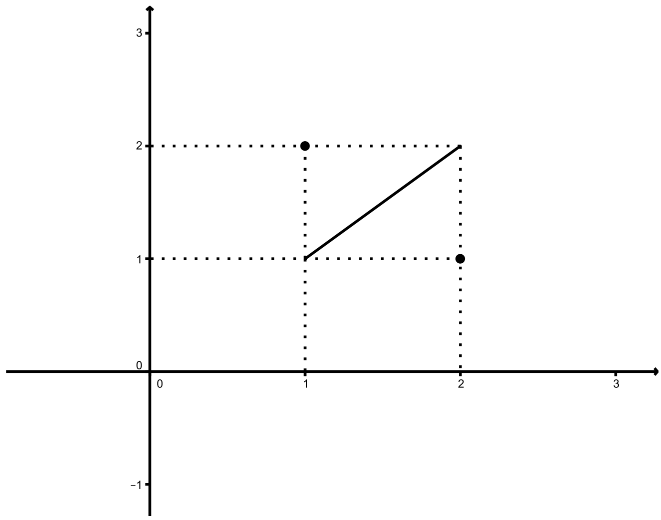
---

[14] Μια φραγμένη συνάρτηση για να είναι και συνεχής πρέπει να είναι και μονότονη. Βλέπε σχετικά την παρατήρηση 8.27 στη σελ. 119



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Σχήμα 8.11:



$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 1 \\ x, & 1 < x < 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Σχήμα 8.12:

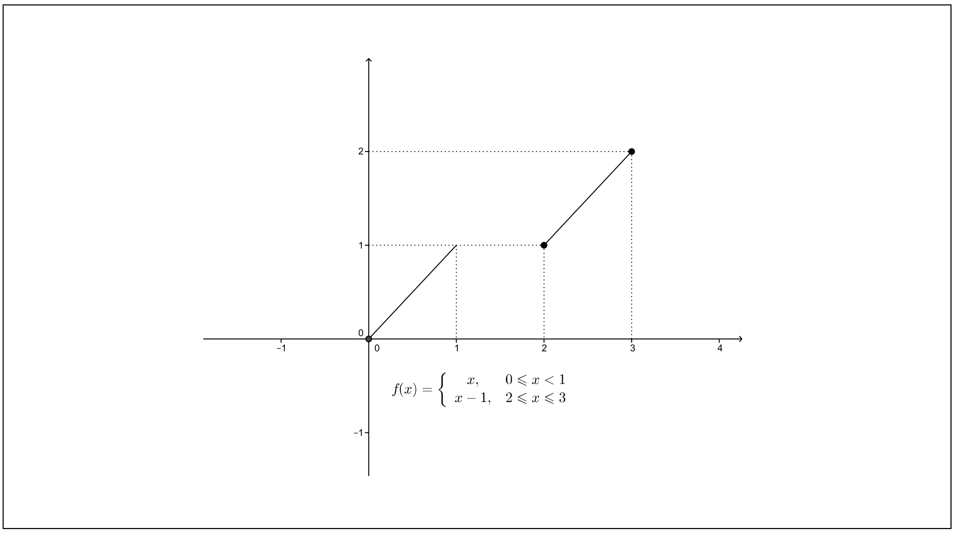
Πρόταση 8.53. *(ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)*

$$\left.\begin{array}{c} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ f \text{ συνεχής} \\ f \text{ γν.μονότονη} \\ f([a,b])=[m,M] \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{υπάρχει η } f^{-1} \\ \text{με } f^{-1}:[m,M]\to[a,b] \\ f^{-1} \text{ συνεχής} \\ f^{-1} \text{ γν.μονότονη} \\ \text{ίδιο είδος μονοτονίας} \\ \text{με την } f \end{array}\right.$$

Ισχυρισμός 8.54. *Αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη, τότε και η f^{-1} θα είναι συνεχής.*

Αντιπαράδειγμα 8.55. Έστω $f:[0,1)\cup[2,3]\to[0,2]$ με τύπο

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x, & 0\leqslant x<1 \\ x-1, & 2\leqslant x\leqslant 3 \end{array}\right. \tag{8.22}$$

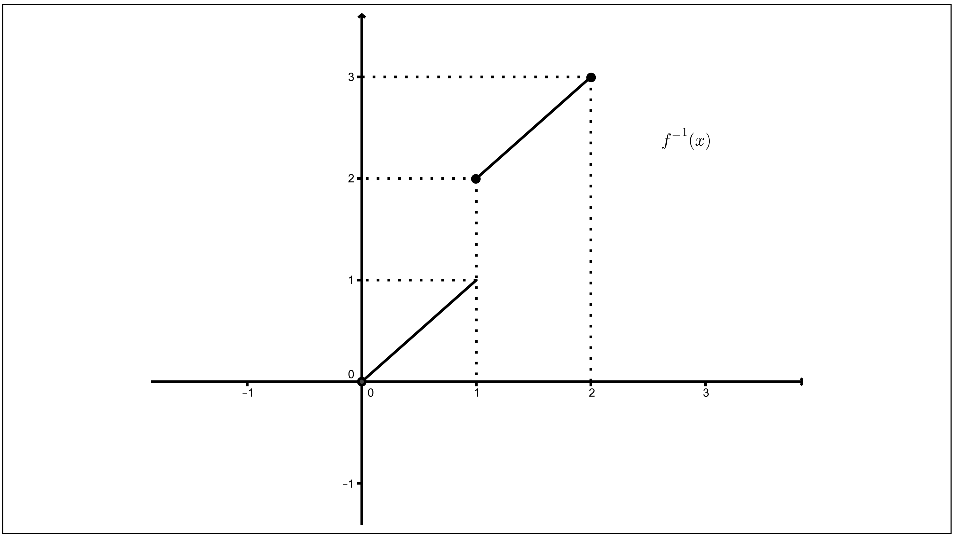


Σχήμα 8.13:

η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη (παρά το ότι το πεδίο ορισμού ΔΕΝ είναι διάστημα), ενώ η αντίστροφή της, $f^{-1}:[0,2]\to$

$[0,1) \cup [2,3]$ με τύπο

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & 0 \leqslant y < 1 \\ y+1, & 1 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases} \tag{8.23}$$



ΔΕΝ είναι συνεχής στο $y = 1$.

Παρατήρηση 8.56. *Αυτό συμβαίνει διότι το πεδίο ορισμού της $f(x)$ (όπως και το σύνολο τιμών της $f^{-1}(y)$) ΔΕΝ είναι διάστημα.*

Κεφάλαιο 9

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πρόταση 9.1. *Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο T, τότε και η παράγωγός της, f', είναι περιοδική με την ίδια περίοδο T.*

Ισχυρισμός 9.2. *Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή αν η παράγωγος f' είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο T, τότε και η f είναι περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο T.*

Αντιπαράδειγμα 9.3. Η συνάρτηση

$$f(x) = x + \sin x$$

έχει παράγωγο

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

που είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.

Η f όμως δεν είναι περιοδική γιατί αν ήταν, τότε θα υπήρχε $T \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{gathered} f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ x + T + \sin(x+T) = x + \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \sin x - \sin(x+T) = T \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \cos\left(x + \frac{T}{2}\right) = -\frac{T}{2\sin\left(\frac{T}{2}\right)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

δηλαδή το συνημίτονο σταθερό $\forall x \in \mathbb{R}$, το οποίο είναι άτοπο.

►***Υπάρχει συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη σε ένα μόνο σημείο.***

Παράδειγμα 9.4. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{9.1}$$

δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα $x \neq 0$, αφού υπάρχουν ακολουθίες ρητών και άρρητων, a_n, b_n, αντίστοιχα, έτσι ώστε $a_n \to x_0 \neq 0$, και $b_n \to x_0 \neq 0$, ενώ $f(a_n) = x_0^2 \neq 0 = f(b_n)$. Βλέπουμε δηλαδή ότι δεν έχει όριο σε κανένα $x \neq 0$, άρα ούτε και συνεχής. Στο μηδέν όμως η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη γιατί αν $a_n \to 0$, και $b_n \to 0$, τότε $f(a_n) = 0^2 = 0 = f(b_n) = f(0)$, και

$$\lim \frac{f(a_n) - f(0)}{x - 0} = \lim \frac{a_n^2 - 0}{a_n} = \lim a_n = 0$$

$$\lim \frac{f(b_n) - f(0)}{x - 0} = \lim \frac{0 - 0}{b_n} = \lim 0 = 0$$

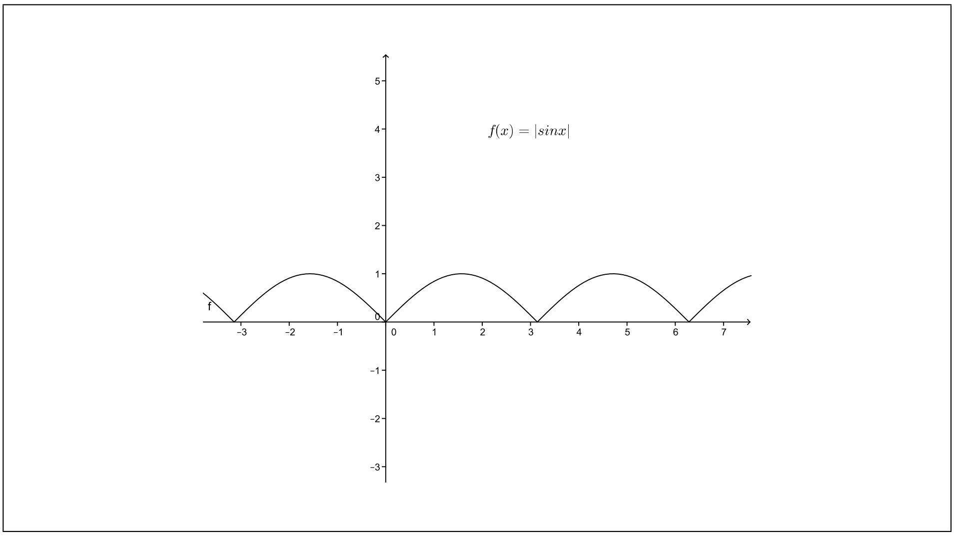
οπότε $f'(0) = 0$.

►***Υπάρχει συνάρτηση που είναι συνεχής παντού αλλά ΜΗ παραγωγίσιμη σε άπειρα σημεία (αριθμήσιμο το πλήθος).***

Παράδειγμα 9.5. Η συνάρτηση $f(x) = |\sin x|$ με $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, και ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη σε αριθμήσιμο πλήθος σημείων της μορφής $x = k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. [1]

►***Υπάρχει συνάρτηση που είναι συνεχής παντού αλλά πουθενά παραγωγίσιμη.***

[1] Σε όλα τα υπόλοιπα σημεία (υπεραριθμήσιμο το πλήθος) είναι παραγωγίσιμη.



Σχήμα 9.1: $f(x) = |\sin x|$

Παράδειγμα 9.6. Η συνάρτηση Weierstrass [2].

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k cos\left(b^k \pi x\right) \tag{9.2}$$

για $0 < a < 1$, $b > 1$ περιττό, και $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, είναι συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Το γράφημά της, είναι σαν ένα fractal, παρουσιάζει αυτοομοιότητα. Αν μεγενθύνουμε συνεχώς, θα βλέπουμε το ίδιο μοτίβο. Έχουμε συνεχώς επαναλαμβανόμενα μοτίβα σε κάθε βήμα.

---

[2]Αυτή είναι η αρχική διατύπωση της συνάρτησης όπως την παρουσίασε ο Karl Theodor Wilhelm Weierstrass το 1872, στη Βασιλική Ακαδημία Επιστημών, στο Βερολίνο. Το 1916, ο Godfrey Hardy απέδειξε ότι είναι αρκετό για να είναι μη παραγωγίσιμη παντού, η συνθήκη $ab \geqslant 1$, ενώ επέτρεψε να είναι και το b πραγματικός αριθμός με $b > 1$. Η συνθήκη $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, είχε προκύψει σαν ανάγκη μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας.

Πρόταση 9.7. *Έστω οι συναρτήσεις* $f : A \to B, g : B \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ *σημείο συσσώρευσης του* A *και* $f(x_0) \in B$ *σημείο συσσώρευσης του* B. *Αν η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *και η* g *είναι παραγωγίσιμη στο* $f(x_0)$, *τότε η* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *και* $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Ισχυρισμός 9.8. *Αν δύο συναρτήσεις ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμες, τότε και η σύνθεση αυτών ΔΕ μπορεί να είναι παραγωγίσιμη.*

Αντιπαράδειγμα 9.9. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f : [1,3] \to [2,5]$ και $g : [2,5] \to [1,3]$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x-1, & 2 < x \leqslant 3 \end{cases} \tag{9.3}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ \frac{x+1}{2}, & 3 < x \leqslant 5 \end{cases} \tag{9.4}$$

αντίστοιχα. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$ και η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο 3. Παρατηρούμε πως $f^{-1}(x) = g(x)$, οπότε έχουμε $(g \circ f)(x) = x$ με $x \in [1,3]$, η οποία είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in [1,3]$.

Αντιπαράδειγμα 9.10. Η συνάρτηση

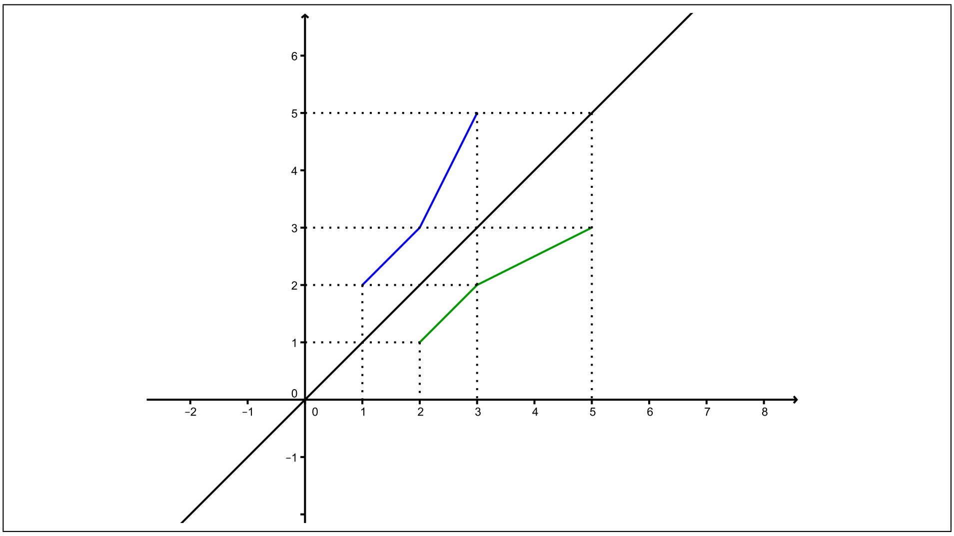
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{9.5}$$

είναι παραγωγίσιμη μόνο στο $x = 0$, ενώ η σύνθεσή της με τη συνάρτηση $g(x) = ln|x|$ με $x \neq 0$ είναι παραγωγίσιμη παντού εκτός απο το $x = 0$.

Είναι

$$(g(f(x)))' = (ln|f(x)|)' = \left(lnx^2\right)' = (2ln|x|)' = \frac{2}{x}$$

Συμπέρασμα 9.11. *Η σύνθεση 2 συναρτήσεων μπορεί να είναι παραγωγίσιμη χωρίς αυτές να είναι παραγωγίσιμες.*



Σχήμα 9.2: Σύνθεση μη παραγωγίσιμων που είναι παραγωγίσιμη.

Πρόταση 9.12. *Αν μια συνάρτηση είναι παράγωγίσιμη* [3] *στο x_0, το γράφημα της συνάρτησης δέχεται εφαπτομένη ευθεία στο x_0.*

Ισχυρισμός 9.13. *Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δέχεται εφαπτομένη ευθεία στο x_0, τότε η συνάρτηση είναι παράγωγίσιμη στο x_0.*

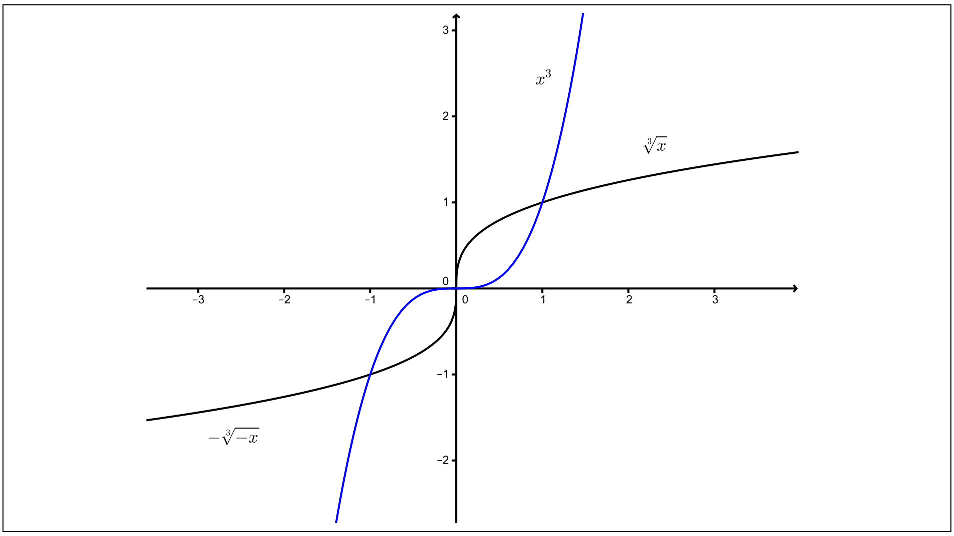
Αντιπαράδειγμα 9.14. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geqslant 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases} \tag{9.6}$$

είναι η αντίστροφη της

$$g(x) = x^3 \quad x \in \mathbb{R} \tag{9.7}$$

[3] Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται παραγωγίσιμη ή αλλιώς διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$. Γράφουμε τότε $f'(x_0) = \ell$.



Σχήμα 9.3: Γράφημα συνάρτησης με εφαπτομένη σε σημείο που δεν είναι παραγωγίσιμη.

και έπεται ότι τα γραφήματά τους, λόγω συμμετρίας έχουν τις ίδιες γεωμετρικές ιδιότητες. Επομένως και τα δύο γραφήματα δέχονται εφαπτομένες στο $x = 0$, η μεν $g(x)$ την $y = 0$ (άξονας $x'x$), η δε $f(x)$ την $x = 0$ (άξονας $y'y$). Όμως ενώ η $g(x)$ είναι παντού παραγωγίσιμη, η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, γιατί

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

αφού

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt[3]{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{-x}\right)^2} = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = +\infty$$

Είναι μόνο κατ'εκδοχήν[4] παραγωγίσιμη στο $x = 0$, οπότε και η εφα-

[4]Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται κατ'εκδοχήν παραγωγίσιμη αν $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$

πτομένη ευθεία σε αυτό το σημείο είναι κατακόρυφη.

Συμπέρασμα 9.15. *Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δέχεται εφαπτομένη ευθεία στο x_0, τότε η συνάρτηση ΔΕΝ είναι απαραίτητα παράγωγίσιμη στο x_0. Η παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0, είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη εφαπτομένης ευθείας στο x_0.*

Παρατήρηση 9.16. *Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δέχεται εφαπτομένη ευθεία στο x_0, τότε δε σημαίνει απαραίτητα πως το x_0 δε θα είναι γωνιακό σημείο. Υπάρχει η λάθος αντίληψη πως όπου το γράφημα μιας συνάρτησης δέχεται εφαπτομένη ευθεία, είναι και "λείο", χωρίς γωνίες.*

Παράδειγμα 9.17. Η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases} \tag{9.8}$$

έχει

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

και

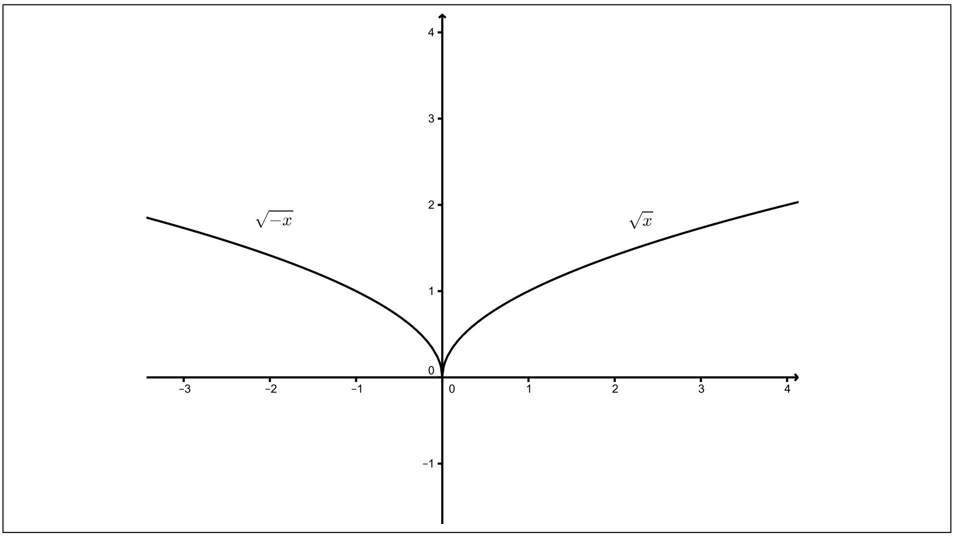
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη ούτε κατ'εκδοχήν, δέχεται όμως εφαπτομένη ευθεία, την κατακόρυφη $x = 0$ (άξονας $y'y$).

Πρόταση 9.18. *Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0.*

Ισχυρισμός 9.19. *Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.*

$+\infty$ ή $-\infty$.



Σχήμα 9.4: $f(x) = \sqrt{|x|}$

Αντιπαράδειγμα 9.20. Συνάρτηση συνεχής στο $x = 0$ χωρίς όμως να είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ είναι η

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \tag{9.9}$$

αφού

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

ενώ

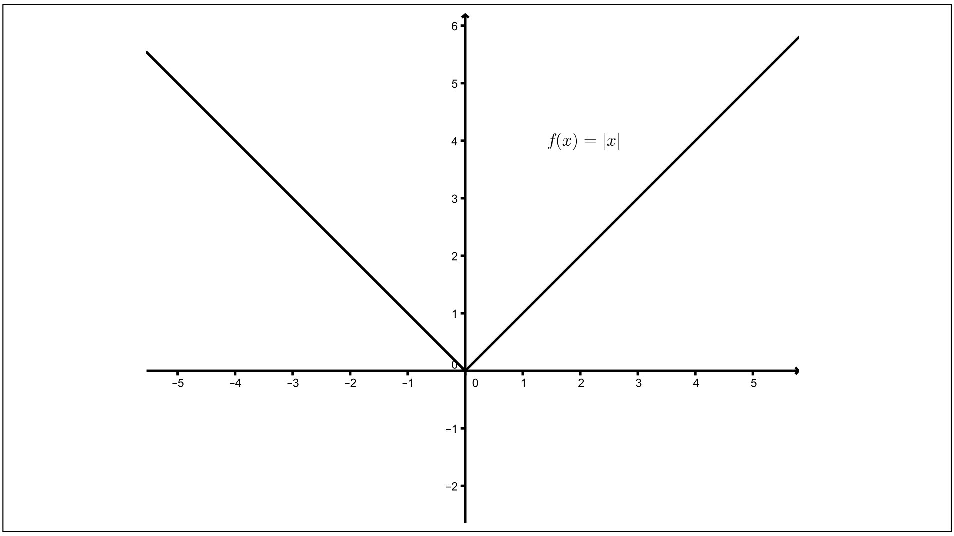
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Αντιπαράδειγμα 9.21. Επίσης η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geqslant 0 \\ \frac{1}{1-x}, & x < 0 \end{cases} \tag{9.10}$$

έχει $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 1$ οπότε είναι συνεχής στο $x = 0$, και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{1+x} = -1$$



Σχήμα 9.5: $f(x) = |x|$

ενώ

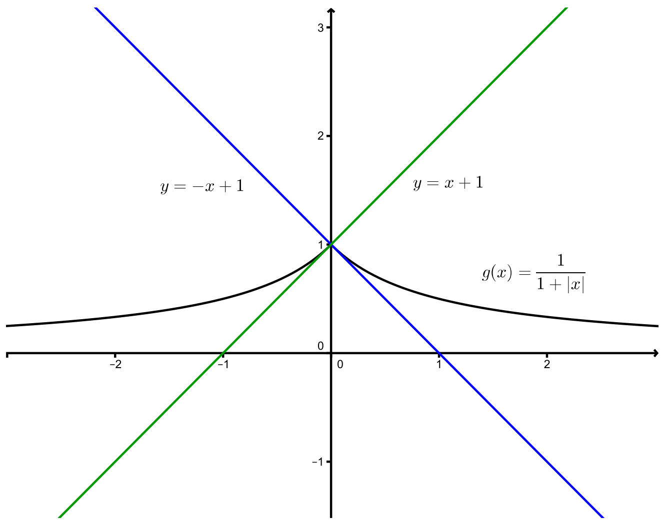
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1$$

οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Συμπέρασμα 9.22. *Το αντίστροφο ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0, δε σημαίνει απαραίτητα ότι είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.*

Παρατήρηση 9.23. *Βλέπουμε στο σχήμα πως οι εφαπτομένες $y = -x + 1$ και $y = x + 1$ του αριστερού και δεξιού κλάδου της $g(x)$ στο $x = 0$, τέμνονται κάθετα. Λέμε τότε ότι οι συναρτήσεις $g_1(x) = \frac{1}{1+x}$ με $x \neq -1$ και $g_2(x) = \frac{1}{1-x}$ με $x \neq 1$ τέμνονται ορθογώνια στο $x = 0$.*

Παρατήρηση 9.24. *Υπάρχει η περίπτωση η συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο x_0, αλλά να έχει κατ'εκδοχήν παράγωγο στο x_0 (δηλαδή $+\infty$ ή $-\infty$).*



Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geqslant 0 \\ \frac{1}{1-x}, & x < 0 \end{cases}$

Σχήμα 9.6:

Παράδειγμα 9.25. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases} \tag{9.11}$$

έχει κατ'εκδοχήν παράγωγο στο $x = 0$, αφού

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{-x}+1}{-x} \end{array} \right\} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

και στο $x = 0$ δεν είναι συνεχής γιατί

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

Ισχυρισμός 9.26. *Οι 2 παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

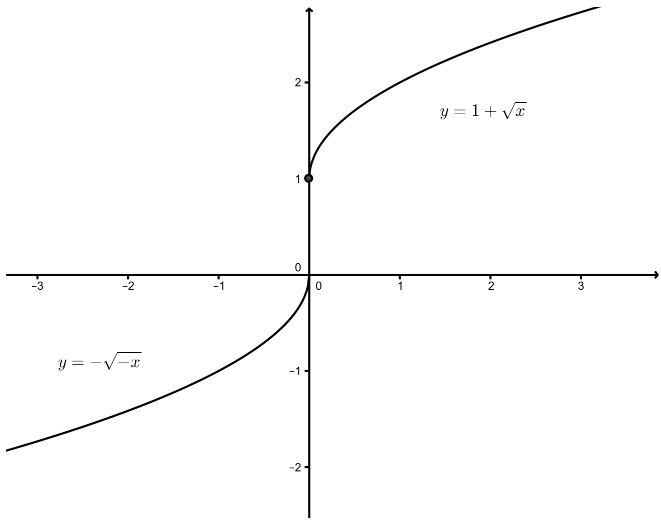
- *Υπάρχει η* $f'(x_0)$
- *Υπάρχει το* $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$

Αντιπαράδειγμα 9.27. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases} \tag{9.12}$$

έχει $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 1$ ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ γιατί είναι ασυνεχής σε αυτό το σημείο.

Παρατήρηση 9.28. *Άρα το να βρούμε το* $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ *για να υπολογίσουμε την τιμή της* f'*, είναι λάθος.*



Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$

Σχήμα 9.7:

Αντιπαράδειγμα 9.29. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{9.13}$$

είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \begin{cases} 2x sin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{9.14}$$

που είναι ασυνεχής στο μηδέν, αφού το

$$\lim_{x\to 0}\left(2x sin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}\right)$$

δεν υπάρχει.

Βλέπουμε δηλαδή, ότι $f'(0) = 0$ ενώ το $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ δεν υπάρχει.

Συμπέρασμα 9.30. *Αν για μια συνάρτηση f ισχύει μία από τις 2 παρακάτω προτάσεις:*

- *Υπάρχει η $f'(x_0)$*
- *Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$*

τότε ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ απαραίτητα και η άλλη.[5]

Θεώρημα 9.31. *(ROLLE)*

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι:

$$\left.\begin{array}{c} \text{συνεχής στο } [a,b] \\ \text{και παραγωγίσιμη στο } (a,b) \\ \text{και } f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{υπάρχει} \\ \text{ένα τουλάχιστον} \\ p \in (a,b) \\ \text{τέτοιο ώστε} \\ f'(p) = 0 \end{array}\right.$$

[5] Για περισσότερες λεπτομέρειες, βλέπε στο Παράρτημα Γ΄ στη σελ. 223

- Το αντίστροφο ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ.
  Οι συνθήκες του Θ.ROLLE είναι ικανές αλλά όχι και αναγκαίες για την ισχύ του συμπεράσματος.

  Παράδειγμα 9.32. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-2,1] \\ 5-2x, & x \in (1,2] \end{cases} \tag{9.15}$$

  είναι

  - ορισμένη στο κλειστό $[-2,2]$
  - μη συνεχής στο κλειστό $[-2,2]$, αφού στο $x = 1$ έχω ασυνέχεια και επομένως
  - μη παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$
  - $f(-2) = 4 \neq 1 = f(2)$

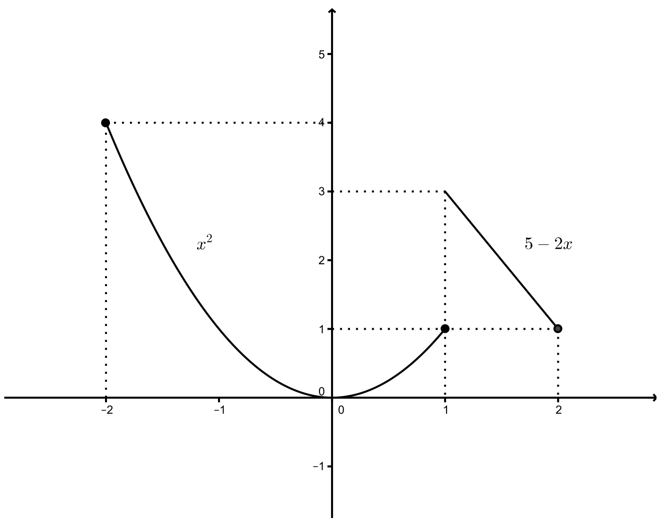
  υπάρχει όμως $p \in (-2,2)$ τέτοιο ώστε $f'(p) = 0$. Είναι το $p = 0$ και έχουμε $f'(0) = 0$. Βλέπουμε δηλαδή πως παρά το γεγονός ότι δεν ικανοποιείται καμμία από τις προϋποθέσεις, το συμπέρασμα ισχύει.

- Οι προϋποθεσεις του θεωρήματος είναι απολύτως απαραίτητες για την ισχύ του συμπεράσματος.
  ΠΡΟΣΟΧΗ!
  Ο ισχυρισμός αυτός δεν έρχεται σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση, διότι εδώ συζητάμε για το ικανό και όχι το αναγκαίο της συνθήκης. Έτσι το συμπέρασμα δεν ισχύει απαραιτήτως αν:

  1. Ισχύουν οι προϋποθέσεις, με τη διαφορά ότι η f είναι συνεχής στο $[a,b)$ και όχι στο $[a.b]$.

     Παράδειγμα 9.33. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leqslant x < 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \tag{9.16}$$



Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-2, 1] \\ 5 - 2x, & x \in (1, 2] \end{cases}$

Σχήμα 9.8:

- είναι ορισμένη στο $[-1, 0]$
- συνεχής στο $[-1, 0)$
- παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$
- $f(-1) = 1 = f(0)$

αλλά δεν υπάρχει $p \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(p) = 0$.

2. Ισχύουν οι προϋποθέσεις, με τη διαφορά ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος (a, b).

Παράδειγμα 9.34. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leqslant x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{9.17}$$

- είναι ορισμένη στο $[-1, 1]$
- συνεχής στο $[-1, 1]$
- παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ εκτός απο το μηδέν.
- $f(-1) = 1 = f(1)$

αλλά δεν υπάρχει $p \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(p) = 0$.

3. Ισχύουν οι προϋποθέσεις, με τη διαφορά ότι $f(a) \neq f(b)$.

Παράδειγμα 9.35. Η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 \text{ με } x \in [1, 2] \tag{9.18}$$

- είναι ορισμένη στο $[1, 2]$
- συνεχής στο $[1, 2]$
- παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$
- $f(1) = 1 \neq 4 = f(2)$

αλλά δεν υπάρχει $p \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(p) = 0$.

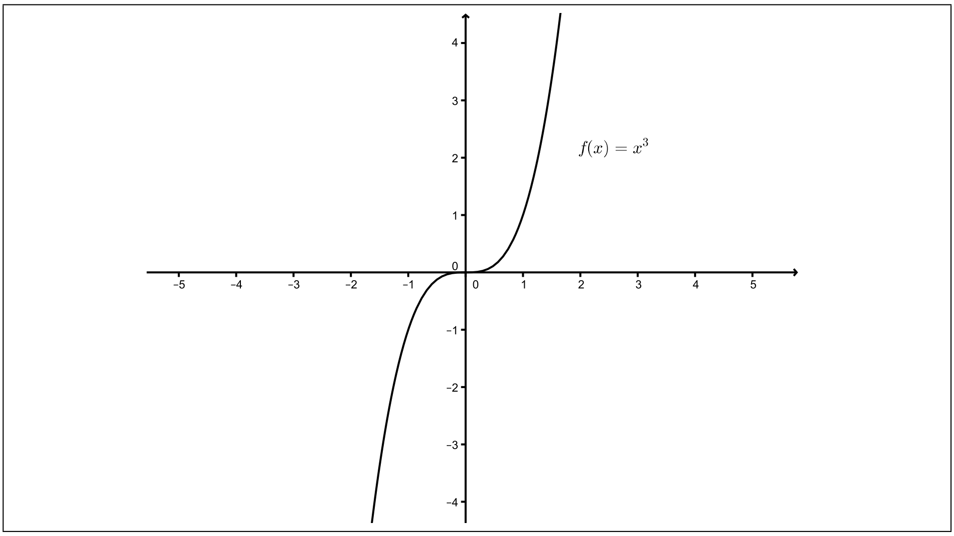
Πρόταση 9.36. *Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.*

Ισχυρισμός 9.37. *Ισχύει και το αντίστροφο. Αν δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.*

Αντιπαράδειγμα 9.38. Η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 \text{ με } x \in \mathbb{R} \tag{9.19}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά στο $x = 0$ είναι $f'(0) = 0$.



Σχήμα 9.9: $f(x) = x^3$

Συμπέρασμα 9.39. *Το αντίστροφο ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ. Αν δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε δε σημαίνει απαραίτητα πως $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.*

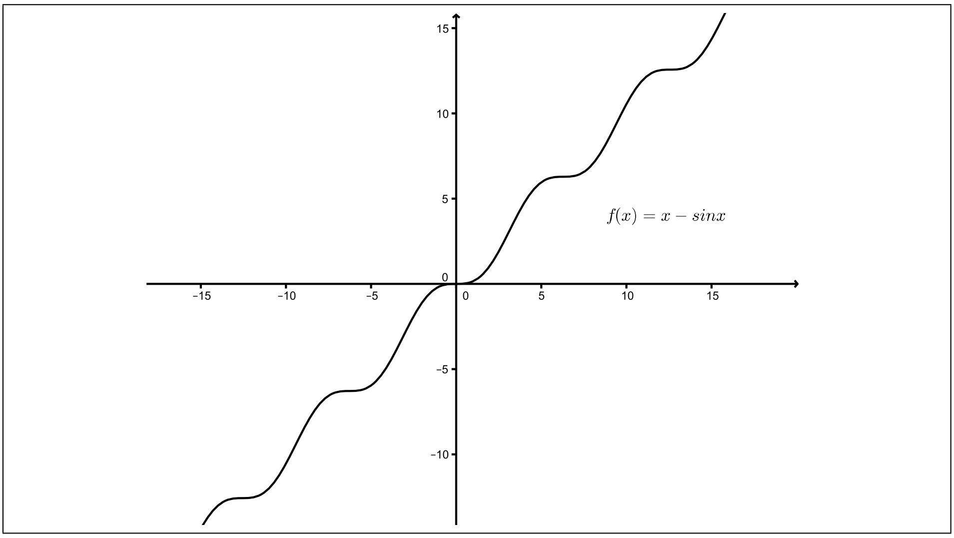
Παρατήρηση 9.40. *Παρά το ότι $f'(0) = 0$, η συνάρτηση στο $x = 0$ δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.*

►***Υπάρχει συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με άπειρο πλήθος ριζών της f', χωρίς κανένα τοπικό ακρότατο.***

Παράδειγμα 9.41. Η συνάρτηση

$$f(x) = x - \sin x \text{ με } x \in \mathbb{R} \tag{9.20}$$

είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Όμως παρατηρούμε ότι $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Έχει δηλαδή αριθμήσιμο το πλήθος ρίζες, αφου το σύνολο των ακεραίων ειναι αριθμήσιμο. Όμως σε κανένα απο αυτά τα σημεία δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.



Σχήμα 9.10: $f(x) = x - \sin x$

ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΕΞΗΣ :

Πόρισμα 9.42. *Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο Δ, τότε $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in \Delta$, με $f'(x) = 0$ το πολύ σε αριθμήσιμο το πλήθος σημεία του Δ.*

►***Υπάρχει συνάρτηση συνεχής σε διάστημα της μορφής*** $[a,+\infty)$ ***αλλά στο*** a ***δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.***

Παράδειγμα 9.43. Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x sin\left(\frac{1}{x}\right), & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \tag{9.21}$$

είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ σαν γινόμενο και σύνθεση συνεχών, ενώ και στο μηδέν είναι συνεχής γιατί $f(0)=0$ και

$$\lim_{x\to 0^+} x sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{sin y}{y}=0$$

αφού

$$\left|\frac{sin y}{y}\right|\leqslant\frac{1}{|y|}\Rightarrow-\frac{1}{|y|}\leqslant\frac{sin y}{y}\leqslant\frac{1}{|y|}$$

και από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{sin y}{y}=\lim_{y\to+\infty}-\frac{1}{|y|}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{|y|}=0$$

Παρατηρούμε ότι όσο πλησιάζουμε κοντά στο μηδέν, η συνάρτηση εναλλάσσει το πρόσημό της διερχόμενη από τον οριζόντιο άξονα με ολοένα και μεγαλύτερη συχνότητα, "άπειρως συχνά".

Θεωρώντας τις ακολουθίες

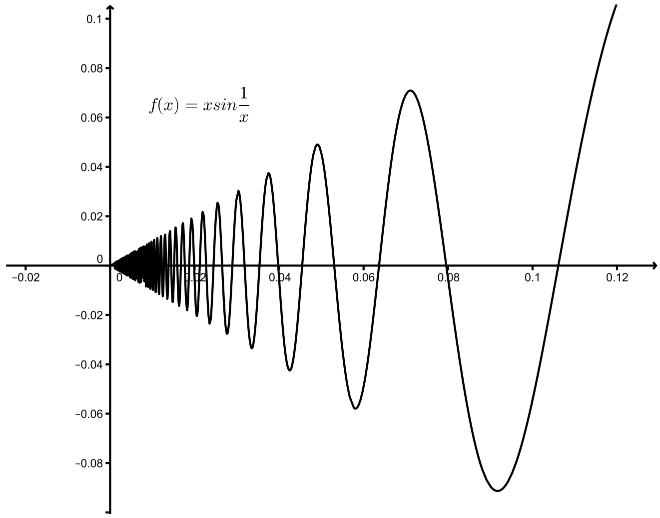
$$a_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$$

και

$$b_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}\quad \text{με } a_n,b_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}$$

και επειδή $a_n\to 0^+,\ b_n\to 0^+$, έπεται ότι σε κάθε διάστημα της μορφής $(0,x)$, περιέχονται άπειροι όροι των ακολουθιών αυτών. Οπότε αφού

$$f(a_n)=a_n\cdot 1=a_n>0$$



Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xsin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Σχήμα 9.11:

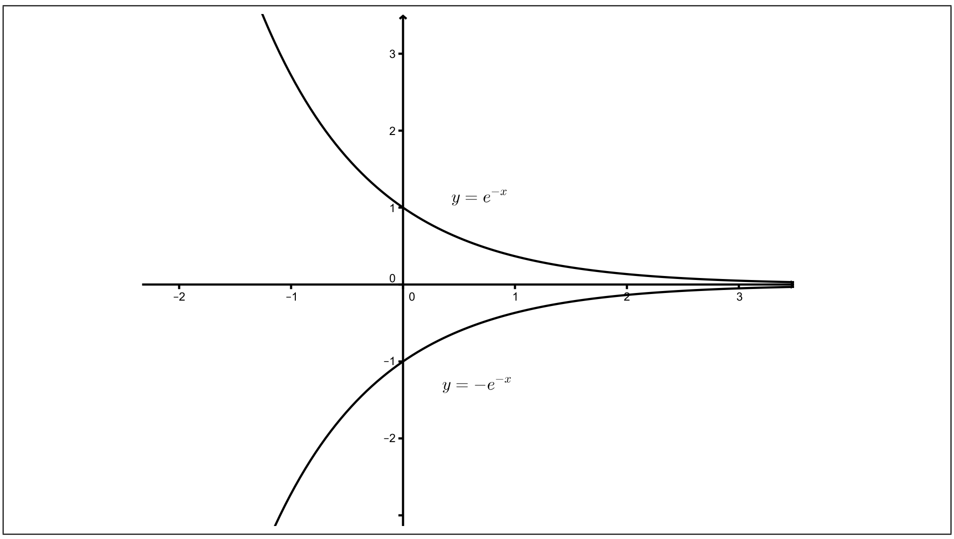
και

$$f(b_n) = b_n \cdot (-1) = -b_n < 0$$

για όλους αυτους τους άπειρους όρους των ακολουθιών, η συνάρτηση $f(x)$ έχει άπειρες τιμές (θετικές - αρνητικές εναλλάξ). Δεν υπάρχει δηλαδή διάστημα κοντά στο μηδέν της μορφής $(0, x)$, στο οποίο η συνάρτηση να διατηρεί σταθερό το πρόσημό της. Επομένως στο μηδέν δε μπορούμε να έχουμε τοπικό ακρότατο.

Ισχυρισμός 9.44. *Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g, ισχύει $f(x) < g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, τότε συνεπάγεται ότι $f'(x) < g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Αντιπαράδειγμα 9.45. Για τις συναρτήσεις $f(x) = -e^{-x} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x) < 0 < g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Όμως $f'(x) = e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $g'(x) = -e^{-x} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, οπότε έχουμε $f'(x) > 0 > g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (βλέπε σχήμα 9.12)



Σχήμα 9.12: Παραγώγιση ανισωτικής σχέσης.

Συμπέρασμα 9.46. *Οι ανισώσεις δεν παραγωγίζονται.*

Πρόταση 9.47. *(ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΗΣ 1ης ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ)*
Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και ισχύει ότι

$$\begin{gathered} f \text{ συνεχής στο διάστημα } \Delta \text{ και} \\ \xi \text{ εσωτερικό σημείο του } \Delta \text{ και} \\ f \text{ παραγωγίσιμη σε περιοχή του } \xi \end{gathered}$$

Τότε αν

- $\left.\begin{array}{r} f'(x) > 0, \quad \forall x \in (\xi - \delta, \xi) \text{ και} \\ f'(x) < 0, \quad \forall x \in (\xi, \xi + \delta) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(\xi)$ *τοπικό μέγιστο,*

ενώ αν

- $\left.\begin{array}{r} f'(x) < 0, \quad \forall x \in (\xi - \delta, \xi) \text{ και} \\ f'(x) > 0, \quad \forall x \in (\xi, \xi + \delta) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(\xi)$ *τοπικό ελάχιστο.*

Ισχυρισμός 9.48. *Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή αν έχουμε ακρότατη τιμή στο σημείο ξ, τότε η μονοτονία της συνάρτησης αλλάζει δεξιά και αριστερά του ξ.*

Αντιπαράδειγμα 9.49. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{9.22}$$

είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και στο $x = 0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Όμως η μονοτονία της f δεν αλλάζει εκατέρωθεν του μηδενός. Ας δούμε αναλυτικότερα:

Για κάθε $x \neq 0$ είναι συνεχής σαν γινόμενο και σύνθεση συνεχών, ενώ και στο $x = 0$ είναι συνεχής αφού

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} x^2\left(2 + sin\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} 2x^2 + \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} xsin\frac{1}{x} \\ &= 0 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

Επίσης είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \neq 0$ με

$$f'(x) = 4x + 2x sin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}$$

και στο $x = 0$ έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\left(2 + sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

όπου βλέπουμε ότι δέχεται εφαπτομένη ευθεία, την $y = 0$. (Επιπλέον να σημειώσουμε ότι η f' δεν είναι συνεχής στο μηδέν.)

Θεωρώντας τώρα

$$a_k = \frac{1}{2k\pi} \to 0,\ b_k = \frac{1}{(2k+1)\pi} \to 0,\ \text{με } k \in \mathbb{Z}^*$$

οι τιμές των οποίων για αρκετά μεγάλα k, ($k \to +\infty$), ή αρκετά μικρά k, ($k \to -\infty$), ανήκουν στο διάστημα $(-\epsilon, \epsilon)$ με $\epsilon > 0$, έχουμε

$$f'(a_k) = \frac{2}{k\pi} - 1 < 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*$$

ενώ

$$f'(b_k) = \frac{4}{(2k+1)\pi} + 1 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$$

Έτσι βλέπουμε ότι σε κάθε διάστημα $(-\epsilon, \epsilon)$ με $\epsilon > 0$, η f' παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές, και άρα η f δεν είναι μονότονη σε κανένα διάστημα της προηγούμενης μορφής.

Όμως η τιμή $f(0) = 0$ είναι η ελάχιστη που μπορεί να λάβει η f για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, αφού

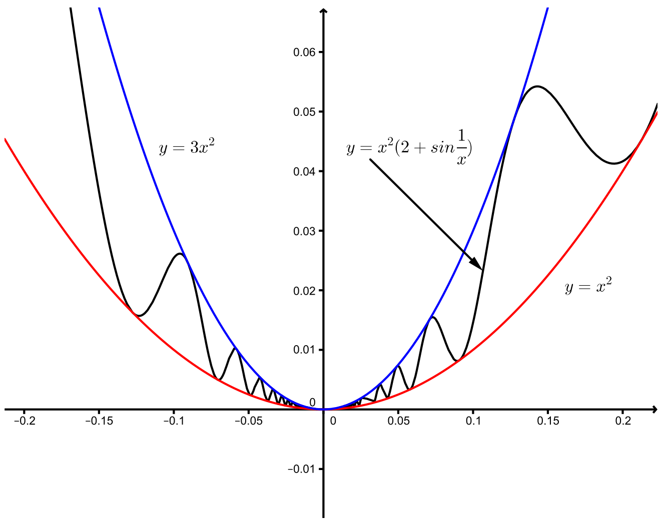
$$-1 \leqslant sin\frac{1}{x} \leqslant 1$$

$$1 \leqslant 2 + sin\frac{1}{x} \leqslant 3$$

$$x^2 \leqslant f(x) \leqslant 3x^2$$

και επομένως

$$f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$



Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Σχήμα 9.13:

Συμπέρασμα 9.50. *Το αντίστροφο ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ. Δηλαδή μπορεί να έχουμε ακρότατη τιμή στο σημείο ξ, χωρίς η μονοτονία της συνάρτησης να αλλάζει δεξιά και αριστερά του ξ.*

Πρόταση 9.51. *Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$, και 2 φορές παραγωγίσιμη στο (a, b).*

- *Αν $f''(x) > 0,\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow$ η f είναι γνήσια κυρτή [6] στο $[a, b]$. (στρέφει τα κοίλα άνω)*
- *Αν $f''(x) < 0,\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow$ η f είναι γνήσια κοίλη στο $[a, b]$. (στρέφει τα κοίλα κάτω)*

Ισχυρισμός 9.52. *Αν η f είναι κυρτή στο $[a, b]$, τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.*

Αντιπαράδειγμα 9.53. Η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 \text{ με } x \in \mathbb{R} \tag{9.23}$$

είναι γνήσια κυρτή παντού, όμως έχει $f''(x) = 12x^2 \geqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.

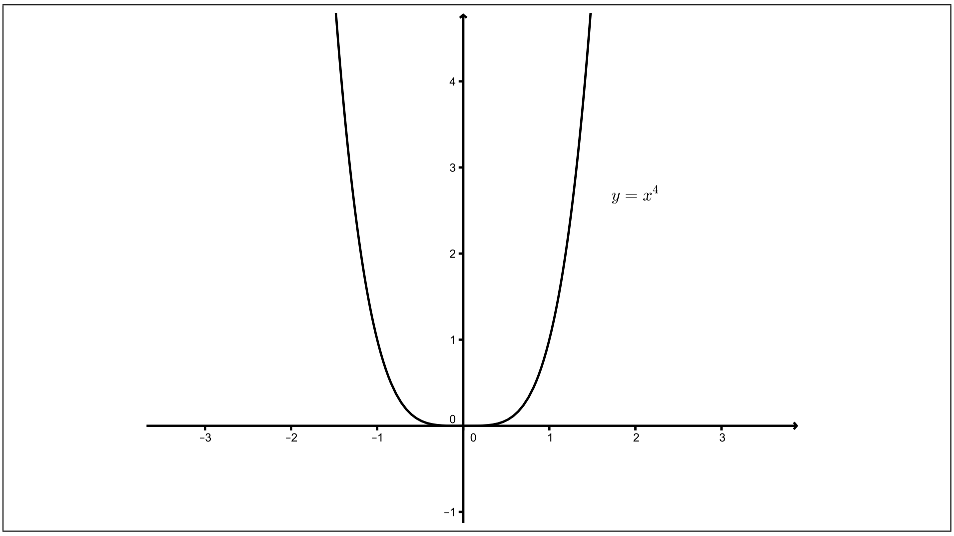
Συμπέρασμα 9.54. *Αν η f είναι κυρτή στο $[a, b]$, τότε δε σημαίνει απαραίτητα πως $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αν όμως είναι γνήσια κυρτή τότε μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η f' είναι γνήσια αύξουσα. Προσοχή! Όχι $f''(x) > 0$, γιατί όπως είδαμε, η $f(x) = x^4$ είναι γνήσια κυρτή, ενώ $f''(0) = 0$.*

ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΕΞΗΣ :

Πρόταση 9.55. *Αν η f είναι κυρτή (κοίλη) και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ τότε είναι $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) \leqslant 0$).*

---

[6] Προσοχή στο διαχωρισμό των εννοιών, γνήσια κυρτή και απλά κυρτή.



Σχήμα 9.14: $f(x) = x^4$

Πρόταση 9.56. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και $x_0 \in (a, b)$ σημείο καμπής της f. Αν υπάρχει η $f''(x_0)$, τότε $f''(x_0) = 0$.*

Ισχυρισμός 9.57. *Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή αν $f''(x_0) = 0$ τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0 σημείο καμπής.*

Αντιπαράδειγμα 9.58. Η συνάρτηση $f(x) = x^4$ είναι γνήσια κυρτή και παρά το ότι $f''(0) = 0$, η συνάρτηση στο $x = 0$ δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

Συμπέρασμα 9.59. *Η συνθήκη του μηδενισμού της δεύτερης παραγώγου, δεν είναι ικανή αλλά μόνο αναγκαία για την ύπαρξη σημείου καμπής στο x_0. Αν επιπλέον της συνθήκης $f''(x_0) = 0$ έχουμε και ότι $f'''(x_0) \neq 0$, τότε το $x = 0$ θα είναι σημείο καμπής της συνάρτησης f.*

Πρόταση 9.60. *Αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση, τότε η f είναι συνεχής στο (a,b).*

Αντιπαράδειγμα 9.61. Η συνάρτηση[7]

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(-1,1)\\ 2, & x=-1,1\end{cases}$$

είναι κυρτή στο $[-1,1]$, αλλά όχι συνεχής.

Αντιπαράδειγμα 9.62. Η συνάρτηση[8]

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$$

είναι κυρτή στο $[0,1]$, αλλά όχι συνεχής.

Συμπέρασμα 9.63. *Η αλήθεια της πρότασης εξαρτάται από την αναγκαιότητα της υπόθεσης ότι η κυρτή συνάρτηση ορίζεται σε ανοιχτό διάστημα (a,b) και όχι σε κλειστό.*

►***Υπάρχει συνάρτηση με άπειρο πλήθος σημείων καμπής.***

Παράδειγμα 9.64. Η συνάρτηση $f(x)=\sin x$ έχει $f''(x)=-\sin x=0\Rightarrow x=k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$ και παρουσιάζει άπειρα (αριθμήσιμο το πλήθος) σημεία καμπής.

►***Υπάρχει συνάρτηση με στάσιμο σημείο στο οποίο δεν παρουσιάζει ούτε τοπικό ακρότατο ούτε σημείο καμπής.***

[7]Βλέπε 17, Τόμος IIα, σελ.50-51.
[8]Βλέπε 21, σελ.87.

Παράδειγμα 9.65. Η συνάρτηση (βλέπε σχήμα 9.15)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{9.24}$$

έχει στάσιμο σήμείο στο $x = 0$ χωρίς να παρουσιάζει ακρότατο σε αυτό, αφού πλησιάζοντας κοντά στο μηδέν λαμβάνει θετικές και αρνητικές τιμές:

$$f\left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}\right)^2 > 0$$

και

$$f\left(\frac{1}{(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = -\left(\frac{1}{(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}}\right)^2 < 0$$

Επιπλέον

$$f'(x) = 2x sin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}$$

και πλησιάζοντας κοντά στο μηδέν λαμβάνει και αυτή θετικές και αρνητικές τιμές:

$$f'\left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} = \begin{cases} > 0 \text{ αν } k > 0 \\ < 0 \text{ αν } k < 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}^*$$

ενώ

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}}\right) &= \frac{-2}{(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}} \\ &= \begin{cases} < 0 \text{ αν } k > 0 \\ > 0 \text{ αν } k < 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}^* \end{aligned}$$

οπότε για $k > 0$ έχουμε $f' > 0$ και $f' < 0$ για μεγάλες τιμές του k. Ομοίως και για $k < 0$. Έτσι δεν υπάρχει διάστημα κοντά στο μηδέν όπου η f' να διατηρεί σταθερο πρόσημο. Οπότε η f δεν είναι μονότονη κοντά στο μηδέν και άρα δεν παρουσιάζει ακρότατο σε αυτό. Επίσης, είναι

$$f''(x) = 2\sin\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$$

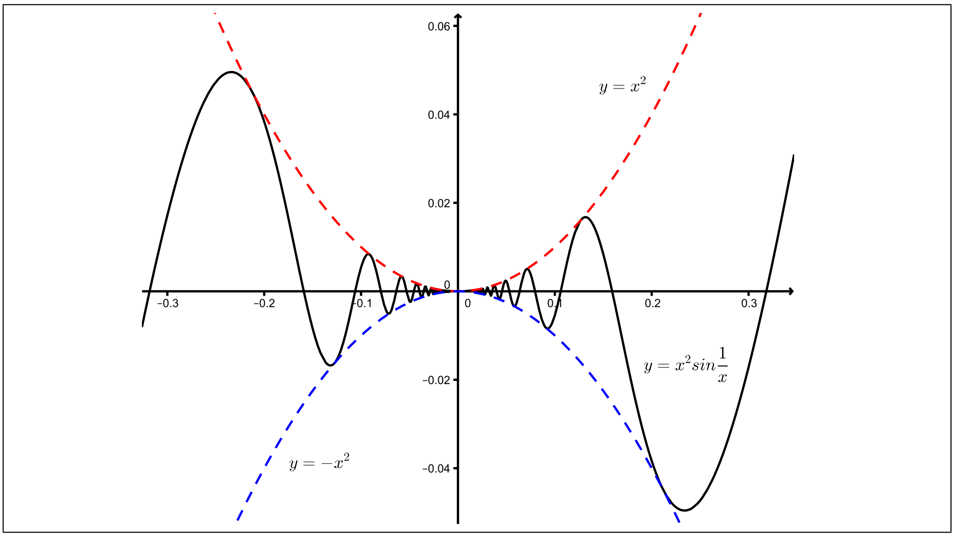
και επιλέγοντας

$$x_1 = \frac{1}{2k\pi}$$
$$x_2 = \frac{1}{2k\pi + \pi}$$

με $k \in \mathbb{Z}^*$, $k > 0$ και αρκετά μεγάλο (αντίστοιχα $k < 0$ και αρκετά μικρό), έχουμε

$$f''(x_1) = -\frac{1}{k\pi} < 0 \quad (> 0)$$
$$f''(x_2) = \frac{2}{2k\pi + \pi} > 0 \quad (< 0)$$

Δηλαδή πλησιάζοντας απείρως κοντά στο μηδέν, δεν υπάρχει περιοχή του μηδενός στην οποία η συνάρτηση να είναι κυρτή ή κοίλη, και επομένως το μηδέν δεν είναι σημείο καμπής αυτής.



Σχήμα 9.15:

Παρατήρηση 9.66. *Ο άξονας $x'x$ που είναι η εφαπτομένη της στο μηδέν, τέμνει τη γραφική παράσταση σε άπειρα (αριθμήσιμο το πλήθος) σημεία, της μορφής* $\frac{1}{k\pi}$.

Πρόταση 9.67. *Αν*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ *τότε στο σημείο* x_0 *η* $f(x)$ *έχει:*

1. *ακρότατη τιμή αν ο* n *άρτιος*

$$\begin{aligned} \text{μέγιστο αν} \quad & f^{(n)}(x_0) < 0 \\ \text{ελάχιστο αν} \quad & f^{(n)}(x_0) > 0 \end{aligned}$$

2. *σημείο καμπής αν ο* n *περιττός.*

►***Υπάρχει συνάρτηση στην οποία δε μπορεί να εφαρμοστεί η προηγούμενη πρόταση.***

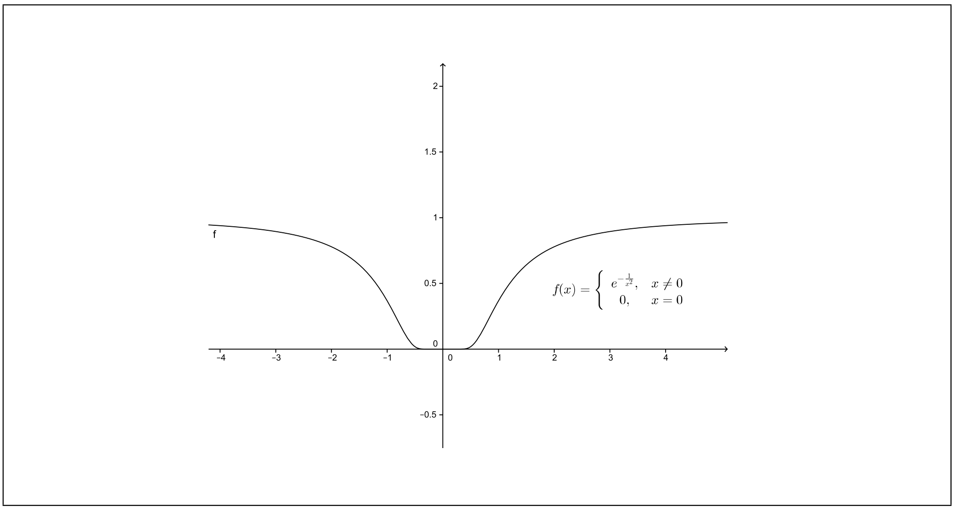
Παράδειγμα 9.68 (Συνάρτηση Cauchy)**.** [9] Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{9.25}$$

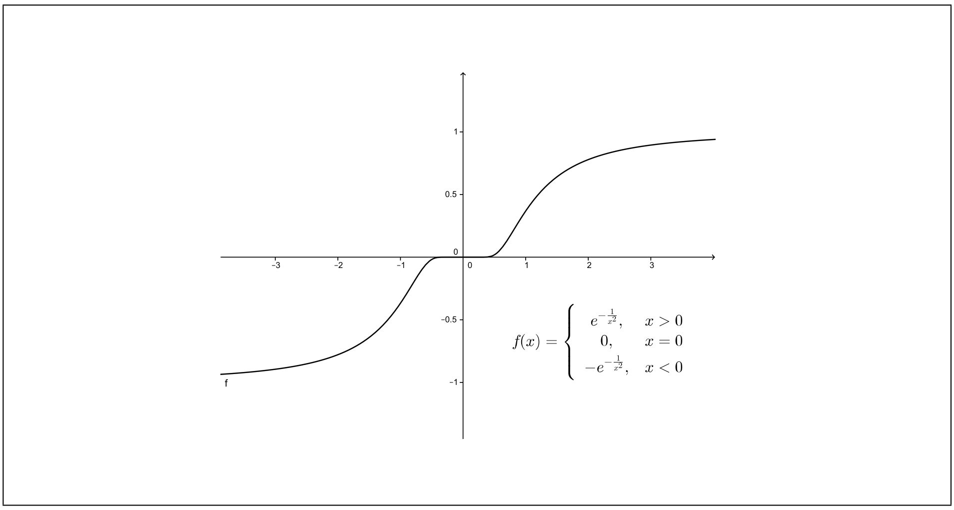
παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x = 0$ ίση με $f(0) = 0$. (βλέπε σχήμα 9.16) Όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $f^{(n)}(0) = 0$, οπότε το ακρότατο δε μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια των παραγώγων της $f(x)$ από την προηγούμενη πρόταση. Ο μηδενισμός όλων των παραγώγων στη θέση $x = 0$ έχει ως συνέπεια στο γράφημα της $f(x)$, η καμπύλη στην περιοχή του μηδενός να προσεγγίζει εξαιρετικά την ευθεία $y = 0$.

Παράδειγμα 9.69. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^{-\frac{1}{x^2}}, & x < 0 \end{cases} \tag{9.26}$$



Σχήμα 9.16: Συνάρτηση Cauchy



Σχήμα 9.17: Παραλλαγή της συνάρτησης Cauchy

παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = 0$. (βλέπε σχήμα 9.17) Όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $f^{(n)}(0) = 0$, οπότε το σημείο καμπής δε μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια των παραγώγων της $f(x)$ από την προηγούμενη πρόταση.

►(ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ)

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$, δε σημαίνει απαραίτητα πως υπάρχει και πλάγια (ή οριζόντια αν $\lambda = 0$) ασύμπτωτη.

Παράδειγμα 9.70. Η συνάρτηση

$$f(x) = x + \sin x \quad \text{με} \quad x \in \mathbb{R} \tag{9.27}$$

έχει

$$\begin{aligned} \lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x} \\ &= 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} (x + \sin x - x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \sin x \end{aligned}$$

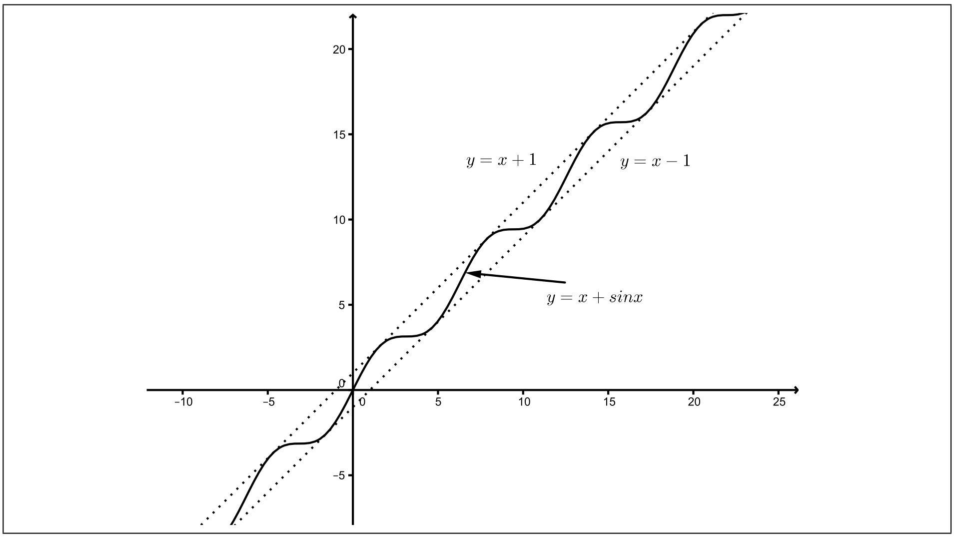
το οποίο δεν υπάρχει, διότι αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες

$$a_n = 2n\pi \to +\infty, \; b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty \quad \text{με } n \in \mathbb{N}$$

έχουμε $\sin a_n = \sin(2n\pi) = 0$ και $\sin b_n = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, και είναι διαφορετικά.

---

[9]Βλέπε 4, σελ.184, και 11, σελ.166.



Σχήμα 9.18: $f(x) = x + \sin x$

ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΕΞΗΣ :

Πρόταση 9.71. *Μια ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, αν και μόνο αν, ισχύει*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R}$$

ή

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R}$$

►Η έννοια της ασύμπτωτης ευθείας του γραφήματος μιας συνάρτησης, δεν αποκλείει την τομή των δύο αυτών γραμμών και μάλιστα σε άπειρα σημεία.

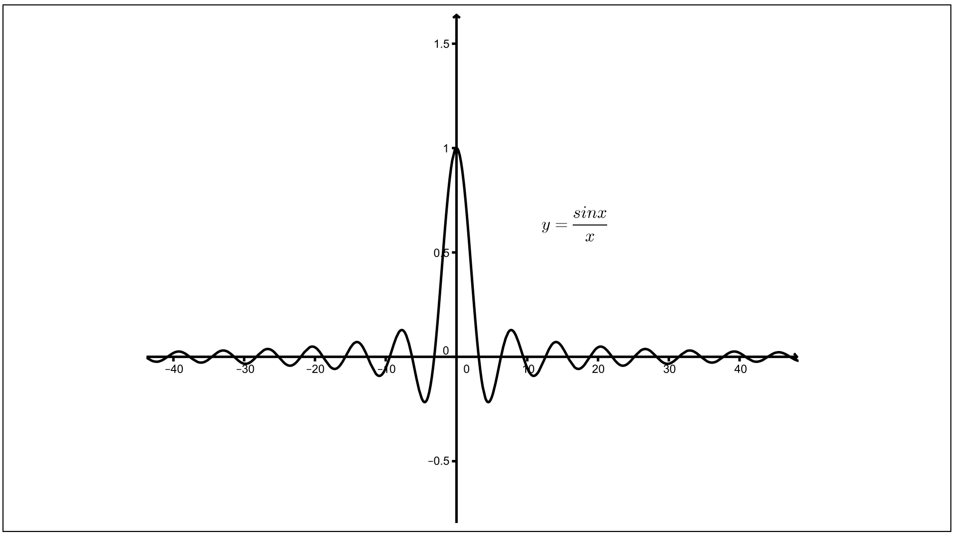
Παράδειγμα 9.72. Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{με } x \neq 0 \tag{9.28}$$

έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$) τόσο στο $+\infty$ όσο και στο $-\infty$ αφού είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Το γράφημα της συνάρτησης και ο άξονας $x'x$ έχουν άπειρα κοινά σημεία, επειδή η εξίσωση $\dfrac{\sin x}{x} = 0$ έχει άπειρες ρίζες, τις $x = k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}^*$. (αριθμήσιμο το πλήθος των ριζών αφού $k \in \mathbb{Z}^*$)



Σχήμα 9.19: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Πρόταση 9.73. *(ΚΑΝΟΝΑΣ DE L'HOSPITAL)*
Αν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ ή } \pm\infty$$

με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *και*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

(με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις και οι παράγωγοί τους ορίζονται σε περιοχή του x_0)

Ισχυρισμός 9.74. *Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή αν το όριο*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ΔΕΝ υπάρχει τότε και το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ΔΕΝ υπάρχει.

Αντιπαράδειγμα 9.75. Η συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 sin\frac{1}{x} \tag{9.29}$$

και

$$g(x) = tanx \tag{9.30}$$

έχουν

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

οπότε

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{xsin\frac{1}{x}}{\frac{tanx}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Όμως

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2 sin\frac{1}{x}\right)'}{(tanx)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2xsin\frac{1}{x}-cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{cos^2 x}}\\ &= \frac{0-\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}}{1}\\ &= -\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}\end{aligned}$$

το οποίο δεν υπάρχει γιατί αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0,\ a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

και

$$b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0,\ a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

τότε

$$cos\frac{1}{a_n} = 1 \neq 0 = cos\frac{1}{b_n}$$

Συμπέρασμα 9.76. *Το αντίστροφο ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ. Μπορεί το όριο*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

να υπάρχει ενώ το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

να μην υπάρχει.

Η μη ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *δε σημαίνει απαραίτητα και τη μη ύπαρξη του* $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Κεφάλαιο 10

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πρόταση 10.1. *Μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a, b]$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$ αν και μόνο αν το κατώτερο ολοκλήρωμα Riemann ισούται με το ανώτερο ολοκλήρωμα Riemann στο $[a, b]$.*

Ισχυρισμός 10.2. *Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν μια συνάρτηση είναι φραγμένη στο κλειστό $[a, b]$ τότε είναι και ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Αντιπαράδειγμα 10.3. Η συνάρτηση Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad x \in [0, 1] \tag{10.1}$$

είναι φραγμένη στο $[0, 1]$, όμως επειδή σε κάθε διάστημα υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρρητοι, έχουμε για μια διαμέριση

$$D = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_n = 1\}$$

του $[0, 1]$:

$$\overline{\int_0^1 f(x)\, dx} = S(D, f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = 1$$

και
$$\underline{\int_0^1 f(x)\,dx} = s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0$$

Οπότε αφού είναι διαφορετικά, η συνάρτηση δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

Συμπέρασμα 10.4. *Οι ολοκληρώσιμες κατα Riemann συναρτήσεις είναι απαραίτητα και φραγμένες. Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει. Με αντιθετοαντιστροφή έχουμε όμως ένα κριτήριο ΜΗ ολοκληρωσιμότητας:*

Αν μια συνάρτηση δεν είναι φραγμένη στο διάστημα $[a, b]$ τότε δεν είναι και ολοκληρώσιμη σε αυτό.

Παράδειγμα 10.5. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{10.2}$$

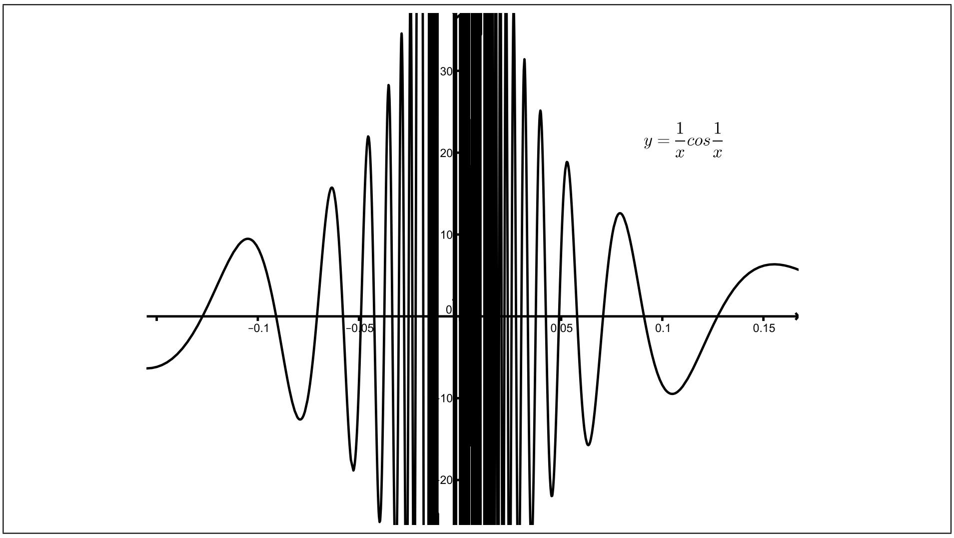
δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0, 1]$ γιατί δεν είναι φραγμένη σε καμμία περιοχή του μηδενός, αφού για $x_n = \frac{1}{2\pi n} \in [0, 1]\,, \quad n \in \mathbb{N}$ είναι $f(x_n) = 2\pi n \to +\infty$.

Πρόταση 10.6. *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής* [1] *στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε είναι και ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$.*

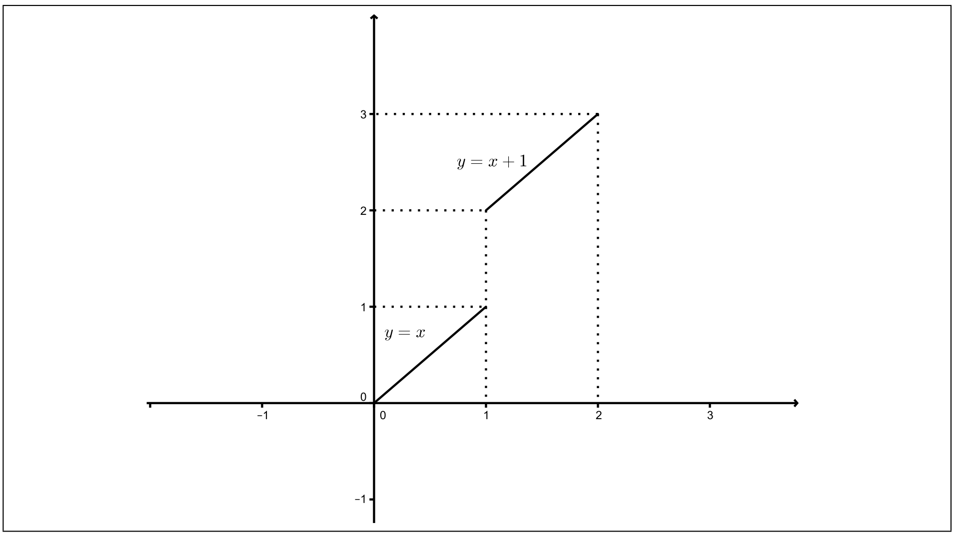
Ισχυρισμός 10.7. *Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ τότε είναι και συνεχής σε αυτό.*

Αντιπαράδειγμα 10.8. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x + 1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \tag{10.3}$$



Σχήμα 10.1: $f(x) = \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$



Σχήμα 10.2: Συνάρτηση ολοκληρώσιμη αλλά μη συνεχής.

είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2]$ παρα το ότι δεν είναι συνεχής στο $x = 1$. Αυτό συμβαίνει γιατί είναι μονότονη (αύξουσα) στο $[0, 2]$. (Βλέπε την πρόταση 10.10 στη σελ.176.)

Συμπέρασμα 10.9. *Οι συνεχείς συναρτήσεις είναι απαραίτητα και ολοκληρώσιμες κατα Riemann. Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει. Με αντιθετοαντιστροφή έχουμε όμως ένα κριτήριο ασυνέχειας:*

Αν μια συνάρτηση δεν είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ τότε δεν είναι και συνεχής σε αυτό.

ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΕΞΗΣ:

Πρόταση 10.10. *Αν η συνάρτηση f είναι μονότονη[2] στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε είναι και ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$.*

Λήμμα 10.11. *Το πλήθος των ασυνεχειών μιας μονότονης συναρτήσης στο (a, b) είναι το πολύ αριθμήσιμο, και επιπλέον δεν έχει 2ου είδους (ουσιώδης-μη αιρόμενες) ασυνέχειες.*

►Μια συνάρτηση μπορεί να είναι ασυνεχής σε πεπερασμένο πλήθος σημεία και όμως να είναι ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα 10.12. Η συνάρτηση

$$f(x) = [x] \ \text{με} \ x \in [0, n] \ \ n \in \mathbb{N} \tag{10.4}$$

είναι αύξουσα και άρα ολοκληρώσιμη. Είναι όμως ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{N}$.

ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΕΞΗΣ:

Πρόταση 10.13. *Μια συνάρτηση που είναι*

[1] Κάθε συνάρτηση συνεχής στο κλειστό $[a, b]$ είναι και φραγμένη. (Βλέπε πρόταση 8.49 στη σελ.132

[2] Κάθε μονότονη συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι και φραγμένη αφου, χωρίς βλάβη της γενικότητας, αν υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα, τότε $\forall x \in [a, b]$ έχουμε $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

1. *φραγμένη στο διάστημα $[a, b]$*
   και

2. *συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο (το πολύ αριθμήσιμο) πλήθος σημείων ασυνέχειας αυτού*

είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$.

►Υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση, χωρίς αρχική[3], με άπειρο πλήθος σημείων ασυνέχειας. Συνάρτηση για την οποία ισχύουν όλα τα παρακάτω:

1. ***φραγμένη σε κλειστό διάστημα,***

2. ***με άπειρο πλήθος σημείων ασυνέχειας,***

3. ***ολοκληρώσιμη,***

4. ***χωρίς παράγουσα.***

Παράδειγμα 10.14. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{N},\ (m, n) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 1] \tag{10.5}$$

είναι:

1. φραγμένη στο $[0, 1]$, με κάτω φράγμα το μηδέν και άνω φράγμα το $1/2$,

2. συνεχής σε κάθε άρρητο και ασυνεχής σε κάθε ρητό, δηλαδή έχει πεπερασμένο (αριθμήσιμο) πλήθος σημείων ασυνέχειας γιατί το πλήθος των ρητών στο διάστημα $[0, 1]$ είναι πεπερασμένο (αριθμήσιμο). Τα σημεία αυτά σχηματίζουν ένα αριθμήσιμο σύνολο μηδενικού μέτρου.

[3]Παράγουσα ή αρχική ή αντιπαράγωγος της συνάρτησης f στο διάστημα Δ, ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta$.

3. ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. (Είναι $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$)

4. χωρίς παράγουσα. (Είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και άρα σε κάθε υποδιάστημα. Αν $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε $F'(x) = 0 = f(x)\ \ \forall x \in [0,1]$ που είναι άτοπο. Συνεπώς $F'(x) = f(x)$ στα άρρητα σημεία, ενώ $F'(x) \neq f(x)$ στα ρητά σημεία.)

►***Υπάρχει συνάρτηση που δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann αλλά έχει αρχική.***

Παράδειγμα 10.15. Η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{10.6}$$

είναι αρχική στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} sin\frac{1}{x} - x^{-\frac{2}{3}} cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{10.7}$$

αφού είναι $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
(Στο $x = 0$ έχουμε

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{4}{3}} sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{3}} sin\frac{1}{x} = 0$$

γιατί $\left|x^{\frac{1}{3}} sin\frac{1}{x}\right| \leqslant \left|x^{\frac{1}{3}}\right|$ και είναι $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{3}} = 0$)
Όμως η f δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0,1]$ γιατί δεν είναι φραγμένη σε καμμία περιοχή του μηδενός, αφού για $x_n = \frac{1}{2\pi n} \in [0,1]$ είναι $f(x_n) = -(2\pi n)^{\frac{2}{3}} \to -\infty$.

►***Υπάρχει συνάρτηση που δεν είναι πουθενά ολοκληρώσιμη.***

Παράδειγμα 10.16. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{10.8}$$

έχει ασυνέχειες 2ου είδους σε όλα τα σημεία (το πλήθος των σημείων ασυνέχειας είναι υπεραριθμίσημο) εκτός από το μηδέν στο οποίο είναι συνεχής. Επομένως δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ γιατί είναι συνεχής σε ένα μόνο σημείο.[4]

►***Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν αρχική σε κάποιο διάστημα Δ στο οποίο ορίζονται.***

Παράδειγμα 10.17. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases} \tag{10.9}$$

έστω ότι έχει αρχική συνάρτηση, την

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1, & x \geqslant 0 \\ 2x + c_2, & x < 0 \end{cases}$$

Όμως η F αφού είναι παραγωγίσιμη, πρέπει να είναι και συνεχής, δηλαδή πρέπει

$$F(0) = \lim_{x \to 0^+} (x + c_1) = c_1 = \lim_{x \to 0^-} (2x + c_2) = c_2 = c$$

Άρα

$$F(x) = \begin{cases} x + c, & x \geqslant 0 \\ 2x + c, & x < 0 \end{cases}$$

[4] Αν $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι πυκνό στο $[a, b]$.

Άρα με αντιθετοαντιστροφή:

Αν το σύνολο των σημείων συνέχειας της $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ΔΕΝ είναι πυκνό στο $[a, b]$, τότε η f ΔΕ μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

και έχουμε για $x > 0 \quad F'(x) = 1$ ενώ για $x < 0 \quad F'(x) = 2$.

Στο $x = 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + c - c}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x + c - c}{x} = 2$$

Βλέπουμε ότι τα δύο όρια δεν είναι ίσα, οπότε η $F'(x)$ δεν ορίζεται στο μηδέν. Αλλά $F'(x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$. Άτοπο, επομένως δεν υπάρχει αρχική συνάρτηση για την $f(x)$.

Παρατήρηση 10.18. *Υπάρχει βαθύτερη αιτία που η f δεν έχει αρχική. Αν υπήρχε η αρχική F της f, π.χ. στο διάστημα $\Delta = [-1, 1]$, τότε από το θεώρημα Darboux*[5] *η f θα λάμβανε κάθε τιμή μεταξύ των $f(1) = 1$ και $f(-1) = 2$, το οποίο όμως δεν ισχύει γιατί δεν υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{3}{2}$.*

Γενικότερα, μια συνάρτηση που δεν έχει σε ένα διάστημα Δ την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών (δηλαδή το $f(\Delta)$ δεν είναι διάστημα) δεν έχει παράγουσα στο Δ.

Παράδειγμα 10.19. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \tag{10.10}$$

δεν έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$. Έστω ότι έχει παράγουσα, την

$$F(x) = \begin{cases} c_1, & x \neq 0 \\ c_2, & x = 0 \end{cases}$$

τότε θα πρέπει να είναι συνεχής στο μηδέν, οπότε

$$F(0) = \lim_{x\to 0} F(x) \Rightarrow c_1 = c_2 = c$$

[5] Θεώρημα Darboux: Έστω ότι η $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Τότε για κάθε λ που ανήκει στο $(f'(a), f'(b))$ ή στο $(f'(b), f'(a))$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \lambda$.

και άρα

$$F(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Επίσης

$$F'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Όμως

$$f(0) = 1 \neq 0 = F'(0)$$

που είναι άτοπο.

Παράδειγμα 10.20. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x+1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \tag{10.11}$$

1. δεν είναι συνεχής στο $x = 1$
2. είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2]$ αφού είναι μονότονη (αύξουσα)
3. δεν έχει παράγουσα γιατί δεν έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών στο $[0, 2]$

Πρόταση 10.21. *(ΥΠΑΡΞΗ ΑΡΧΙΚΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)*

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ στο $[a, b]$, υπάρχει συνάρτηση $F(x)$ τέτοια ώστε $F'(x) = f(x)$ σε κάθε σημείο $x \in [a, b]$ όπου η $f(x)$ είναι συνεχής, και είναι $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad x \in [a, b]$.

►Μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ με ασυνέχειες, μπορεί να μην έχει παράγουσα (όπως είδαμε σε προηγούμενα παραδείγματα), μπορεί όμως σε μερικές περιπτώσεις και να έχει.

Παράδειγμα 10.22. Η συνεχής συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{10.12}$$

είναι παράγουσα της

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{10.13}$$

που είναι ασυνεχής στο μηδέν, αφού το

$$\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$$

δεν υπάρχει. Η $f(x)$ είναι και φραγμένη στο $[-1, 1]$ οπότε είναι και ολοκληρώσιμη[6] με

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = 2\sin 1$$

Παρατήρηση 10.23. *Μία ολοκληρώσιμη αλλά ασυνεχής συνάρτηση μπορεί να έχει αρχική επειδή υπάρχουν συναρτήσεις με ασυνεχή παράγωγο.*

► ***Οποιαδήποτε παράγουσα μιας συνάρτησης $f(x)$ ΔΕ γράφεται οπωσδήποτε στη μορφή***

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Παράδειγμα 10.24. Η αρχική συνάρτηση $F(x) = x^2 + 1$ της $f(x) = 2x$ ΔΕ γράφεται στην παραπάνω μορφή, γιατί αφού

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x 2t\,dt = \left[t^2\right]_a^x = x^2 - a^2$$

θα είχαμε

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow x^2 + 1 = x^2 - a^2 \Rightarrow a^2 = -1$$

Άτοπο, δεν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = x^2 + 1$.

[6] Αν η φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$ τότε είναι ολοκληρώσιμη. (Βλέπε την πρόταση 10.13 στη σελ.176)

► ***Έστω συνάρτηση***

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, b] \\ f_2(x), & x \in (b, c] \end{cases}$$

και $F_1(x), F(x)$ ***παράγουσες των*** $f_1(x), f_2(x)$ ***αντίστοιχα.***

Δε σημαίνει απαραίτητα ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in [a, b] \\ F_2(x), & x \in (b, c] \end{cases}$$

είναι παράγουσα της $f(x)$ ***στο*** $[a, c]$***.***

Παράδειγμα 10.25. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} lnx, & x > 1 \\ x - 1, & x \leqslant 1 \end{cases} \tag{10.14}$$

η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Μια αρχική της $(x-1)$ είναι η $\left(\frac{x^2}{2} - x\right)$, και μια αρχική της (lnx) είναι η $(xlnx - x)$.

Όμως η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} xlnx - x, & x > 1 \\ \frac{x^2}{2} - x, & x \leqslant 1 \end{cases} \tag{10.15}$$

δεν είναι συνεχής στο $x = 1$ γιατί $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1 \neq -\dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ και άρα ούτε παραγωγίσιμη $\Longrightarrow$ ούτε και αρχική της $f(x)$.
Για να μην συμβαίνει αυτό πρέπει η $F(x)$ να είναι συνεχής. Το σύνολο των αρχικών συναρτήσεων των (lnx) και $(x-1)$, είναι $(xlnx - x + c_1)$ και $\left(\frac{x^2}{2} - x + c_2\right)$ αντίστοιχα. Για να είναι η $F(x)$ να είναι συνεχής πρέπει

$$\lim_{x \to 1^+} (xlnx - x + c_1) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x^2}{2} - x + c_2\right) \Rightarrow$$

$$-1 + c_1 = -\frac{1}{2} + c_2 \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{1}{2} + c_2$$

Από την αρχή θα μπορούσαμε να γράψουμε μια αρχική

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_1^x (tlnt - t)\,dt, & x > 1 \\ \int_1^x \left(\frac{t^2}{2} - t\right) dt, & x \leqslant 1 \end{cases} \tag{10.16}$$

από όπου έχουμε

$$F(x) = \begin{cases} xlnx - x + 1, & x > 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}, & x \leqslant 1 \end{cases} \tag{10.17}$$

το οποίο προκύπτει και για $c_1 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$.

Το σύνολο όλων των αρχικών της $f(x)$ είναι

$$\int f(t)\,dt = \begin{cases} xlnx - x + \frac{1}{2} + c, & x > 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + c, & x \leqslant 1 \end{cases} \quad c \in \mathbb{R} \tag{10.18}$$

Πρόταση 10.26. *Έστω διάστημα Δ και συναρτήσεις f, F_1, $F_2 : \Delta \to \mathbb{R}$. Αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο Δ και η μία από τις F_1, F_2 είναι αρχική της f στο Δ, τότε και η άλλη είναι αρχική της f στο Δ.*

Αντιστρόφως, αν οι F_1, F_2 είναι αρχικές της f στο Δ, τότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο Δ.

Ισχυρισμός 10.27. *Αν ισχύει $F'(x) = G'(x)$ τότε $F(x) = G(x) + c$ όπου $c \in \mathbb{R}$ μια σταθερά.*

Αντιπαράδειγμα 10.28. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$F(x) = \begin{cases} ln|x| + 2, & x > 0 \\ ln|x| + 1, & x < 0 \end{cases} \tag{10.19}$$

και

$$G(x) = \begin{cases} ln|x| + 1, & x > 0 \\ ln|x| + 2, & x < 0 \end{cases} \tag{10.20}$$

Ισχύει $F'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ και $G'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$, οπότε $F'(x) = G'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Όμως δεν υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $F(x) = G(x) + c$ γιατί

$$\left.\begin{array}{l} \text{αν } x > 0, \quad ln|x| + 2 = ln|x| + 1 + c \\ \text{αν } x < 0, \quad ln|x| + 1 = ln|x| + 2 + c \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} c = 1 \\ \text{και} \\ c = -1 \end{array}\right.$$

που είναι άτοπο.

Παρατήρηση 10.29. *Για το $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$ έχουμε $x \in (-\infty, 0)$ ή $x \in (0, +\infty)$ και ΌΧΙ ΣΤΗΝ ΈΝΩΣΗ $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ενώ οι αρχικές συναρτήσεις της $\frac{1}{x}$ στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, είναι οι συναρτήσεις* $F(x) = \left\{\begin{array}{ll} ln|x| + c_1, & x > 0 \\ ln|x| + c_2, & x < 0 \end{array}\right.$

Αντιπαράδειγμα 10.30. Για τις συναρτήσεις $F(x) = x^3,\ x \in [0, 1] \cup [2, 3]$ και $G(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^3 + 1, & x \in [0, 1] \\ x^3 - 1, & x \in [2, 3] \end{array}\right.$ ισχύει ότι $F'(x) = G'(x) = 3x^2$ για κάθε $x \in [0, 1] \cup [2, 3]$. Όμως η διαφορά τους $F - G$ δεν είναι σταθερά.

Συμπέρασμα 10.31. *Αν ισχύει $F'(x) = G'(x)$ και το x ανήκει σε ένωση διαστημάτων, τότε δε σημαίνει απαραίτητα πως οι συναρτήσεις $F(x), G(x)$ διαφέρουν πάντα κατά μια σταθερά c. (Δηλαδή $F(x) = G(x) + c$)*

Η έννοια της αρχικής αναφέρεται πάντα σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Πρόταση 10.32. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε οι συναρτήσεις*

1. $f + g$

2. $f \cdot g$

3. f^2

4. $|f|$

είναι ολοκληρώσιμες.

Ισχυρισμός 10.33. *Ισχύει και το αντίστροφο.*

Δηλαδή αν $f+g$, $f \cdot g$, f^2, $|f|$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε και οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες.

Αντιπαράδειγμα 10.34. Έστω συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{10.21}$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x) = -f(x)$ ΔΕΝ είναι ολοκληρώσιμες, ενώ οι συναρτήσεις $f+g=0$, $f \cdot g = -1$, $f^2 = 1$, $|f| = 1$ είναι ολοκληρώσιμες.

Συμπέρασμα 10.35. *Το αντίστροφο ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ.*

Δηλαδή αν $f+g$, $f \cdot g$, f^2, $|f|$ είναι ολοκληρώσιμες, δε σημαίνει απαραίτητα ότι και οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες.

Πρόταση 10.36. *(ΣΥΝΘΕΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ)*

Έστω $f\colon [a,b] \to [c,d]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a,b]$ και $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[c,d]$. Τότε η σύνθεση $g \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Ισχυρισμός 10.37. *Η σύνθεση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.*

Αντιπαράδειγμα 10.38. Έστω η συνάρτηση $f\colon [0,1] \to [0,1]$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in A_n \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N} \\ 0, & x \in [0,1] \text{ και } x \notin A_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{10.22}$$

όπου

$$A_n = \left\{ \frac{2k-1}{2^n} \mid k \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1} \right\}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

δηλαδή

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{2} \right\}, A_2 = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}, A_3 = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \right\}, \ldots$$

Ισχύει επίσης ότι

$$A_n \subseteq [0,1]\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } A_m \cap A_n = \varnothing \quad \forall m,n \in \mathbb{N} \text{ με } m \neq n$$

και ότι το σύνολο $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ είναι πυκνό στο διάστημα $[0,1]$.

Επιπλέον θεωρούμε και τη συνάρτηση $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{10.23}$$

Μπορούμε τώρα να δούμε ότι οι 2 συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες και είναι $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ και $\int_0^1 g(x)\,dx = 1$.

Η σύνθεση όμως $g \circ f$ που ορίζεται στο $[0,1]$ και έχει τύπο

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_n \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N} \\ 0, & x \in [0,1] \text{ και } x \notin A_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{10.24}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Συμπέρασμα 10.39. *Η κλάση των συνεχών συναρτήσεων περιέχει την κλάση των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, οπότε η υπόθεση ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής δε μπορεί να αντικατασταθεί από την ασθενέστερη υπόθεση ότι η g είναι ολοκληρώσιμη. Άρα:* ***Η σύνθεση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων μπορεί και να μην είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.***

►***Ενώ ισχύει ότι $\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, ΔΕΝ ισχύει γενικά ότι $\int f(x)\cdot g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$.***

Παράδειγμα 10.40. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = x + 1$. Τότε

$$\int f(x)\cdot g(x)dx = \int x^2 + xdx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$$

ενώ

$$\begin{aligned} &\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx = \\ &\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)\cdot\left(\frac{x^2}{2} + x + c_2\right) = \\ &\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + c \end{aligned}$$

Συμπέρασμα 10.41. *Το ολοκλήρωμα γινομένου συναρτήσεων δεν ισούται με το γινόμενο των ολοκληρωμάτων τους:*

$$\int f(x)\cdot g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

►***Οι ανισωτικές σχέσεις ΔΕΝ ολοκληρώνονται.***

Παράδειγμα 10.42. Έστω η ανίσωση

$$x < x + 1 \quad \text{με} \quad x \in \mathbb{R}$$

ολοκληρώνουμε κατά μέλη και έχουμε

$$\begin{aligned} &\int xdx < \int (x+1)dx \Rightarrow \\ &\frac{x^2}{2} + c_1 < \frac{x^2}{2} + x + c_2 \Rightarrow \\ &c_1 - c_2 < x \end{aligned}$$

και βλέπουμε ότι καταλήγουμε σε μια ανίσωση που δεν ισχύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ αλλά μόνο για τα $x > c_1 - c_2$.

Κεφάλαιο 11

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Πρόταση 11.1. *Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.*

Ισχυρισμός 11.2. *Αν $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ τότε $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$.*

Αντιπαράδειγμα 11.3. Αν $\vec{a} \perp \vec{b}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos90° = 0$

Γενικά ισχύει η επόμενη πρόταση:

Πρόταση 11.4. [1]

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Πρόταση 11.5. *Αν $\vec{a} = \vec{b}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{c}$.*

Ισχυρισμός 11.6. *Αν $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ με $\vec{c} \neq \vec{0}$ τότε $\vec{a} = \vec{b}$.*

Αντιπαράδειγμα 11.7. Έστω $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$ και $\vec{c} = (1, 1) \neq \vec{0}$. Τότε είναι $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 1$. Όμως $\vec{a} \neq \vec{b}$.

Συμπέρασμα 11.8. *Άρα βλέπουμε ότι ο νόμος της διαγραφής ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού ΔΕΝ ισχύει στα διανύσματα.*

[1] Αν είναι $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$, τότε και αυτή η περίπτωση περιλαμβάνεται στην πρόταση, αφού τα μηδενικά διανύσματα μπορούν να θεωρηθούν ως κάθετα σε κάθε άλλο διάνυσμα και επιπλέον κάθετα και μεταξύ τους.

Ισχύει όμως το εξής:

Πρόταση 11.9.

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{c}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} &\Leftrightarrow \\ \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 &\Leftrightarrow \\ (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 &\Leftrightarrow \\ (\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{c} & \end{aligned}$$

□

Ισχυρισμός 11.10.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Αντιπαράδειγμα 11.11. Έστω $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$ και $\vec{c} = (1, 1)$. Τότε είναι $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \vec{a} \cdot 1 = (1, 0)$ ενώ $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \cdot \vec{c} = (0, 0) = \vec{0}$

Άρα βλέπουμε ότι ούτε ο προσεταιριστικός νόμος ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού ισχύει στα διανύσματα. Γενικά δηλαδή ισχύει:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Ισχυρισμός 11.12. *Ισχύει ότι* $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Αντιπαράδειγμα 11.13. Αν $\vec{a} = (0, 1)$ και $\vec{b} = (1, 1)$ τότε έχουμε

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

οπότε $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |1| = 1$, ενώ

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Γενικά ισχύει

Πρόταση 11.14. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Απόδειξη. Είναι

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\vartheta \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

οπότε

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant \Big||\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\Big| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\cos\vartheta = 1 \Rightarrow \vartheta = 0$, δηλαδή όταν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι συγγραμμικά. □

Ισχυρισμός 11.15. *Ισχύει ότι* $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 \cdot (\vec{b})^2$

Αντιπαράδειγμα 11.16. Αν $\vec{a} = (0, 1)$ και $\vec{b} = (1, 1)$ τότε έχουμε

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

οπότε $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 1^2 = 1$, ενώ

$$(\vec{a})^2 \cdot (\vec{b})^2 = (0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 1 \cdot 2 = 2$$

Γενικά ισχύει η εξής πρόταση:

Πρόταση 11.17. $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant (\vec{a})^2 \cdot (\vec{b})^2$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= \\ \Big(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\vartheta\Big)^2 &= \\ |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\cos\vartheta)^2 &\leqslant \\ |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot 1 &= \\ (\vec{a})^2 \cdot (\vec{b})^2 & \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\cos\vartheta = 1 \Rightarrow \vartheta = 0$, δηλαδή όταν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι συγγραμμικά. □

Ισχυρισμός 11.18. *Ισχύει* $(\vec{a})^n = |\vec{a}|^n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *με* $n > 1$.

Αντιπαράδειγμα 11.19. Έστω $\vec{a} = (1, 1)$. Τότε έχουμε

$$(\vec{a})^2 = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 2$$

και

$$|\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{1^2 + 1^2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

Δηλαδή $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$.
Όμως

$$(\vec{a})^3 = (\vec{a})^2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \vec{a} = (2, 2)$$

ενώ

$$|\vec{a}|^3 = \left(\sqrt{1^2 + 1^2}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$$

οπότε $(\vec{a})^3 \neq |\vec{a}|^3$.

Το σωστό δίνεται από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 11.20. *Ισχύει* $(\vec{a})^n = |\vec{a}|^n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *με* n *άρτιο. Αν* n *περιττός, τότε* $(\vec{a})^n = |\vec{a}|^{(n-1)} \cdot \vec{a}$

Απόδειξη. Έστω $\vec{a} = (x, y)$. Έχουμε

$$(\vec{a})^2 = (x \cdot x + y \cdot y) = x^2 + y^2$$

και

$$|\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$$

δηλαδή

$$(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$$

Αν n άρτιος, τότε $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\begin{aligned}(\vec{a})^n &= (\vec{a})^{2k}\\ &= \left((\vec{a})^2\right)^k\\ &= \left(|\vec{a}|^2\right)^k\\ &= |\vec{a}|^{2k}\\ &= |\vec{a}|^n\end{aligned}$$

Αν n περιττός, τότε $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\begin{aligned}(\vec{a})^n &= (\vec{a})^{2k+1}\\ &= (\vec{a})^{2k} \cdot \vec{a}\\ &= |\vec{a}|^{n-1} \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

□

Ισχυρισμός 11.21. *Ισχύουν και για τα διανύσματα οι γνωστές ταυτότητες της άλγεβρας.*

Αντιπαράδειγμα 11.22. Η ταυτότητα $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ δεν ισχύει για τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1)$ και $\vec{b} = (0, 1)$.
Είναι

$$(\vec{a})^3 = |\vec{a}|^2 \cdot \vec{a} = 2(1, 1) = (2, 2)$$

και

$$(\vec{b})^3 = |\vec{b}|^2 \cdot \vec{b} = 1(0, 1) = (0, 1)$$

οπότε έχουμε

$$(\vec{a})^3 - (\vec{b})^3 = (2, 2) - (0, 1) = (2, 1)$$

ενώ

$$\begin{aligned}(\vec{a} - \vec{b})\left((\vec{a})^2 + \vec{a}\vec{b} + (\vec{b})^2\right) &=\\ (1, 0)(2 + 1 + 1) &=\\ (4, 0)\end{aligned}$$

Συμπέρασμα 11.23. *Δεν ισχύουν για τα διανύσματα ταυτότητες περιττών δυνάμεων, παρά μόνο άρτιων δυνάμεων, όπως*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$$

Αυτό συμβαίνει γιατι στις ταυτότητες περιττών δυνάμεων, όπως του προηγούμενου αντιπαραδείγματος, έχουμε ισότητες διανύσμάτων. Όμως οι γνωστές ταυτότητες είναι ισότητες αριθμών και έχουν ισχύ μόνο για αυτούς.

Ισχυρισμός 11.24. *Αν* $(\vec{a})^2 = (\vec{b})^2$ *τότε* $\vec{a} = \vec{b}$.

Αντιπαράδειγμα 11.25. Έστω $\vec{a} = (1,2)$ και $\vec{b} = (2,1)$. Έχουμε τότε, $(\vec{a})^2 = (\vec{b})^2 = 5$ ενώ προφανώς είναι $\vec{a} \neq \vec{b}$.

Παρατήρηση 11.26. *Επειδή* $(\vec{a})^2 = (\vec{b})^2 \Rightarrow (\vec{a})^2 - (\vec{b})^2 = 0$ *και ισχύει η ταυτότητα*

$$(\vec{a})^2 - (\vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$$

έχουμε

$$(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = 0$$

οπότε

$$(\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b}) = 0$$

που για τα διανύσματα $\vec{a} = (1,2)$ *και* $\vec{b} = (2,1)$ *αληθεύει.*

Ισχύει το εξής:

Συμπέρασμα 11.27. $(\vec{a})^2 = (\vec{b})^2 \Rightarrow (\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b}) = 0$

Κεφάλαιο 12

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ισχυρισμός 12.1. *Αν* z *ανήκει στο σύνολο* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών, και* a, b *είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε:*

1. $z^2 > 0$ *για κάθε* $z \in \mathbb{R}$.

2. *αν* $a < b \Rightarrow ai < bi$.

Αντιπαράδειγμα 12.2.

1. Αν $z = 2i$ τότε $z^2 = (2\iota)^2 = -4 < 0$.

2. Αν $a = 2 < 3 = b$ τότε δεν ισχύει ότι $2i < 3i$, γιατί αν αυτό είναι αληθές, έχουμε $(2i)^2 < (3i)^2 \Rightarrow -4 < -9$, άτοπο.

Συμπέρασμα 12.3. *Η διάταξη ΔΕΝ ισχύει στο σύνολο* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών. Έτσι ένας μιγαδικός αριθμός ΔΕ μπορεί να χαραχτηριστεί σαν θετικός ή αρνητικός (δεν ισχύει η ιδιότητα της τριχοτομίας), και επίσης ΔΕ μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ δύο μιγαδικών αριθμών.*

Πρόταση 12.4. *Αν* $z = w$, *όπου* z, w *ανήκουν στο σύνολο* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών, τότε* $|z| = |w|$.

Ισχυρισμός 12.5. *Αν $|z| = |w|$, όπου z, w ανήκουν στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, τότε $z = w$.*

Αντιπαράδειγμα 12.6. Αν $z = 1 + 2i$ και $w = 2 + i$ οπότε $z \neq w$, τότε $|z| = |w| = \sqrt{5}$.

Συμπέρασμα 12.7. *Όπως και στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, έτσι και στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, η ισότητα των μέτρων δε συνεπάγεται και ισότητα αριθμών. Στο μεν $\mathbb{R}$ σε κάθε μέτρο (απόλυτη τιμή) αντιστοιχούν 2 μόνο αριθμοί, στο δε $\mathbb{C}$, σε κάθε μέτρο αντιστοιχούν απειροι αριθμοί. Και αυτό γιατί ενώ στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, 2 μόνο σημεία κάθε φορά απέχουν εξίσου από το μηδέν ($|x| = a \Rightarrow x = a$ ή $x = -a$), στο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών, τα άπειρα σημεία ενός κύκλου απέχουν εξίσου από την αρχή των αξόνων ($|x + yi| = a \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$).*

Ισχυρισμός 12.8. *Η εξίσωση $z^2 + w^2 = 0$, όπου z, w ανήκουν στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, είναι αδύνατη.*

Αντιπαράδειγμα 12.9. Αν $z = 1$ και $w = i$ έχουμε $z^2 + w^2 = 1^2 + i^2 = 1 + (-1) = 0$.

Συμπέρασμα 12.10. *Όπως είδαμε και προηγούμενα, το τετράγωνο μιγαδικού αριθμού δεν είναι πάντα θετικό. Μπορεί να είναι και αρνητικό, οπότε άθροισμα ετερόσημων είναι δυνατό να ισούται με μηδέν.*

Γενικά η λύση της εξίσωσης $z^2 + w^2 = 0$ στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι:

Απόδειξη. Αν $z = x + yi$, $w = a + bi$, με $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$z^2 + w^2 = 0 \Leftrightarrow \tag{12.1}$$

$$(x + yi)^2 + (a + bi)^2 = 0 \Leftrightarrow \tag{12.2}$$

$$(x^2 - y^2 + a^2 - b^2) + 2(xy + ab)i = 0 \Leftrightarrow \tag{12.3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} & x^2 - y^2 + a^2 - b^2 = 0 \quad (12.4) \\ \text{και} & xy + ab = 0 \quad (12.5) \end{cases}$$

Επίσης

$$z^2 + w^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$z^2 = -w^2 \Rightarrow \text{[1]}$$
$$|z^2| = |-w^2| \Leftrightarrow$$
$$|z|^2 = |w|^2 \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z} = w\bar{w} \Leftrightarrow$$
$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \quad (12.6)$$

Έτσι, προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (12.4) και (12.6) έχουμε

$$\Rightarrow 2x^2 = 2b^2 \Leftrightarrow x^2 = b^2 \Leftrightarrow |x| = |b|$$

και μέσω της (12.6) έχουμε επιπλέον

$$|a| = |y|$$

Άρα, από την (12.5)

- αν $x = b \Rightarrow by + ab = 0 \Rightarrow a = -y$, δηλαδή

  $$z = x + yi \quad \text{και} \quad w = -y + xi$$

  οπότε

  $$z = iw$$

- αν $x = -b \Rightarrow -by + ab = 0 \Rightarrow a = y$, δηλαδή

  $$z = x + yi \quad \text{και} \quad w = y - xi$$

  οπότε

  $$z = -iw$$

[1] Εδώ ΔΕΝ έχει μπεί το σύμβολο της ισοδυναμίας γιατί ΔΕΝ ισχύει το αντίστροφο, βλέπε αντιπαράδειγμα 12.6 στη σελ.196.

□

Ισχυρισμός 12.11. *Η παράσταση $z^2 + w^2$, όπου z, w ανήκουν στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, ΔΕΝ παραγοντοποιείται.*

Αντιπαράδειγμα 12.12. Είναι

$$z^2 + w^2 = z^2 - (iw)^2 = (z - iw)(z + iw)$$

Συμπέρασμα 12.13. *Δεν πρέπει να συγχέουμε την παράσταση $x^2 + y^2$ που είναι θετική για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, οπότε δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και άρα δεν παραγοντοποιείται, με την παράσταση $z^2 + w^2$ που έχει 2 ρίζες[2] ως προς z στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, τις iw, $-iw$ και για αυτό το λόγο μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο με τον τρόπο που δείξαμε.*

Ισχυρισμός 12.14. *Ισχύει ότι $|z|^2 = z^2$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.*

Αντιπαράδειγμα 12.15. Αν $z = 1+2i$, τότε $|z|^2 = 5$, ενώ $z^2 = -3+4i$. Βλέπουμε δηλαδή, ότι το $|z|^2$ είναι πραγματικός αριθμός, ενώ το z^2 δεν είναι. Άρα γενικά ισχύει $|z|^2 \neq z^2$.

Συμπέρασμα 12.16. *Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $z \in \mathbb{R}$.*

Άρα ισχύει η πρόταση:

Πρόταση 12.17. $|z|^2 = z^2 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

[2]Βλέπε τη γενική λύση της εξίσωσης $z^2 + w^2 = 0$ στο αντιπαράδειγμα 12.9 στη σελ. 196

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} |z|^2 = z^2 &\Leftrightarrow z\overline{z} = z^2 \\ &\Leftrightarrow z(z - \overline{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \quad \text{ή} \quad z - \overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \quad \text{ή} \quad Im(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

Ισχυρισμός 12.18. *Ισχύει ότι $|z|^2 = -z^2$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.*

Αντιπαράδειγμα 12.19. Αν $z = 1+2i$, τότε $|z|^2 = 5$, ενώ $-z^2 = 3-4i$. Βλέπουμε δηλαδή, ότι το $|z|^2$ είναι πραγματικός αριθμός, ενώ το z^2 δεν είναι. Άρα γενικά ισχύει $|z|^2 \neq -z^2$.

Συμπέρασμα 12.20. *Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $z = 0$ ή $Re(z) = 0$.*

Άρα ισχύει η πρόταση:

Πρόταση 12.21. $|z|^2 = -z^2 \Leftrightarrow z \in \mathbb{I} = \{xi \setminus x \in \mathbb{R}\}$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} |z|^2 = -z^2 &\Leftrightarrow z\overline{z} = -z^2 \\ &\Leftrightarrow z(z + \overline{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \quad \text{ή} \quad z + \overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \quad \text{ή} \quad Re(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{I} \end{aligned}$$

□

Ισχυρισμός 12.22. *Για κάθε z, w που ανήκουν στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, ισχύει $|z + w| = |z| + |w|$.*

Αντιπαράδειγμα 12.23. Αν $z = 1$ και $w = i$, τότε $|z + w| = |1 + i| = \sqrt{2}$, ενώ $|z| + |w| = |1| + |i| = 2 \neq \sqrt{2}$.

Γενικά ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 12.24. *Για κάθε z, w που ανήκουν στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, ισχύει $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.*

Παρατήρηση 12.25. *Η ισότητα $|z + w| = |z| + |w|$ ισχύει αν και μόνο αν $z = kw$, με $k > 0$.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
|z + w| = |z| + |w| &\Leftrightarrow \\
(|z + w|)^2 = (|z| + |w|)^2 &\Leftrightarrow \\
(z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2 &\Leftrightarrow \\
z\overline{w} + w\overline{z} = 2|z| \cdot |w| &\Leftrightarrow \\
(z\overline{w} + w\overline{z})^2 = 4|z|^2 \cdot |w|^2 &\Leftrightarrow \\
(z\overline{w} + w\overline{z})^2 = 4z\overline{z}w\overline{w} &\Leftrightarrow \\
(z\overline{w} - w\overline{z})^2 = 0 &\Leftrightarrow \\
z\overline{w} - w\overline{z} = 0 &\Leftrightarrow \\
z\overline{w} = w\overline{z} &\Leftrightarrow \\
z\overline{w} = \overline{(z\overline{w})} &\Leftrightarrow \\
z\overline{w} \in \mathbb{R} &
\end{aligned} \tag{12.7}$$

οπότε αν $z = x + yi$ και $w = a + bi$ έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
(x + yi)\overline{(a + bi)} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \\
[xa + yb + (ya - xb)i] \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \\
ya = xb &
\end{aligned}$$

Ας εξετάσουμε τωρα τις περιπτώσεις:

1. Αν $a \neq 0$ και $b \neq 0$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned} ya = xb &\Leftrightarrow \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} &= k > 0 \end{aligned}$$

Το k είναι θετικό διότι:
Όταν υψώνουμε την ισότητα (12.7) στο τετράγωνο, για να ισχύει η ισοδυναμία, απαιτούμε και τα δύο μέλη να είναι ομόσημα. Όμως αφού $2|z| \cdot |w| > 0$, συνεπάγεται ότι $z\overline{w} + w\overline{z} > 0$.
Άρα

$$\begin{aligned} z\overline{w} + \overline{(z\overline{w})} > 0 &\Leftrightarrow \\ 2Re(z\overline{w}) > 0 &\Leftrightarrow \\ xa + yb > 0 & \end{aligned}$$

Όμως είναι $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ οπότε τα γινόμενα xa και yb είναι ομόσημα. Επομένως $xa > 0$ και $yb > 0$. Επιπλέον $\frac{x}{a} > 0$ και $\frac{y}{b} > 0$ οπότε $k > 0$
Επομένως

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = k > 0 &\Leftrightarrow \\ x = ka,\ y = kb &\Leftrightarrow \\ z = ka + kbi &\Leftrightarrow \\ z = k(a + bi) &\Leftrightarrow \\ z = kw & \end{aligned}$$

2. Αν $a = 0$ τότε επειδή $ya = xb$ έχουμε $xb = 0$ οπότε $x = 0$ ή $b = 0$. Όμως $xa + yb > 0$ άρα $yb > 0$. Αν $b = 0$ άτοπο, οπότε $x = 0$. Δηλαδή $z = yi$ και $w = bi$ και αφού $y, b \in \mathbb{R}$, υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε $y = kb$. Επομένως $z = kw$.

3. Αν $b = 0$ όμοια.

4. Αν $a = 0$ και $b = 0$ τότε επειδή $xa + yb > 0$, η περίπτωση αυτή μας οδηγεί σε άτοπο.

$\square$

Κεφάλαιο 13

ΠΙΝΑΚΕΣ

Πρόταση 13.1. *Αν $A = \mathbb{O}$ ή $B = \mathbb{O}$ τότε $AB = \mathbb{O}$.*

Ισχυρισμός 13.2. *Αν $AB = \mathbb{O}$ τότε $A = \mathbb{O}$ ή $B = \mathbb{O}$.*

Αντιπαράδειγμα 13.3. Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Έχουμε τότε $AB = \mathbb{O}$ ενώ $A \neq \mathbb{O}$ και $B \neq \mathbb{O}$.

Παρατήρηση 13.4. *Αν $AB = \mathbb{O}$ και $A \neq \mathbb{O}$ τότε ΔΕΝ ισχύει απαραίτητα $B = \mathbb{O}$.*

Ισχύει όμως το εξής:

Πρόταση 13.5. *Αν $AB = \mathbb{O}$ και A αντιστρέψιμος, τότε $B = \mathbb{O}$.*

Απόδειξη. Έχουμε $AB = \mathbb{O} \Rightarrow A^{-1}AB = \mathbb{O} \Rightarrow \mathbb{I}B = \mathbb{O} \Rightarrow B = \mathbb{O}$. □

Παρατήρηση 13.6. *Με αντιθετοαντιστροφή έχουμε ότι αν $AB \neq \mathbb{O}$ τότε $A \neq \mathbb{O}$ και $B \neq \mathbb{O}$. Το αντίστροφο όμως, όπως είδαμε και προηγουμένως, ΔΕΝ ισχύει. Δηλαδή αν $A \neq \mathbb{O}$ και $B \neq \mathbb{O}$ ΔΕ συνεπάγεται απαραίτητα ότι $AB \neq \mathbb{O}$.*

Πρόταση 13.7. *Αν* $A = \mathbb{O}$ *τότε* $A^n = \mathbb{O}$, *με* $n \in \mathbb{N}^*$.

Ισχυρισμός 13.8. *Αν* $A^n = \mathbb{O}$, *με* $n \in \mathbb{N}^*$ *τότε* $A = \mathbb{O}$.

Αντιπαράδειγμα 13.9. Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Έχουμε τότε $A^2 = \mathbb{O}$ ενώ $A \neq \mathbb{O}$.

Παρατήρηση 13.10. *Αν* $A^n = \mathbb{O}$ *αλλά* $A^{n-1} \neq \mathbb{O}$ *για κάποιο* $n > 1,\ n \in \mathbb{N}$, *τότε ο πίνακας* A *λέγεται μηδενοδύναμος με δείκτη* n.

Πρόταση 13.11. *Αν* $A = \mathbb{I}$ *τότε* $A^n = \mathbb{I}$, *με* $n \in \mathbb{N},\ n > 1$.

Ισχυρισμός 13.12. *Αν* $A^n = \mathbb{I}$ *με* $n \in \mathbb{N},\ n > 1$ *τότε* $A = \mathbb{I}$.

Αντιπαράδειγμα 13.13. Έστω $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. Έχουμε τότε $A^2 = \mathbb{I}$ ενώ $A \neq \mathbb{I}$.

Παρατήρηση 13.14. *Αν* $A^n = \mathbb{I}$ *αλλά* $A^{n-1} \neq \mathbb{I}$ *για κάποιο* $n > 1,\ n \in \mathbb{N}$, *τότε ο πίνακας* A *λέγεται μοναδοδύναμος με δείκτη* n.

Ισχυρισμός 13.15. *Αν* $AC = BC$ *με* $C \neq \mathbb{O}$ *τότε* $A = B$.

Ας αποδείξουμε ότι ο παραπάνω ισχυρισμός ΔΕΝ ισχύει.
Είναι

$$AC = BC \Rightarrow AC - BC = \mathbb{O} \Rightarrow (A - B)C = \mathbb{O}$$

Όμως ΔΕΝ ισχύει απαραίτητα ότι $A - B = \mathbb{O} \Rightarrow A = B$ ή $C = \mathbb{O}$. (Βλέπε 13.2)

Συμπληρωματικά δίνεται και το επόμενο αντιπαράδειγμα.

Αντιπαράδειγμα 13.16. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}$. Έχουμε τότε $AC = BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ενώ $A \neq B$.

Πρόβλημα 13.17. Σε ποια όμως περίπτωση θα μπορούμε να συνάγουμε ότι $A = B$;

Την απάντηση δίνει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 13.18. [1] *Αν ο τετραγωνικός πίνακας $C_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος τότε*

$$AC = BC \Leftrightarrow A = B$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} AC &= BC \Leftrightarrow \\ ACC^{-1} &= BCC^{-1} \Leftrightarrow \\ A\mathbb{I} &= B\mathbb{I} \Leftrightarrow \\ A &= B \end{aligned}$$

□

Ισχυρισμός 13.19. *Αν $A^2 + B^2 = \mathbb{O}$ τότε είναι $A = \mathbb{O}$ ή $B = \mathbb{O}$.*

Αντιπαράδειγμα 13.20. Για τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ισχύει $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$ ενώ είναι $A \neq \mathbb{O}$ και $B \neq \mathbb{O}$.

Ισχυρισμός 13.21. *Ισχύει ότι $AB = BA$.*

[1] Οι πίνακες A και B δεν είναι αναγκαίο να είναι τετραγωνικοί. Αφου ο πίνακας C είναι $n \times n$ αρκεί οι πίνακες A και B να είναι $m \times n$.

Αντιπαράδειγμα 13.22. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Έχουμε τότε $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ενώ $BA = \mathbb{O}$. Άρα $AB \neq BA$.

Συμπέρασμα 13.23. *Στους πίνακες, η αντιμεταθετική ιδιότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό, γενικά ΔΕΝ ισχύει.*

Ισχυρισμός 13.24. *Αν $AB = BA$ τότε $AB = BA = \mathbb{I}$. Δηλαδή αν δύο πίνακες αντιμετατίθονται, τότε είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.*

Αντιπαράδειγμα 13.25. Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Έχουμε τότε

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα αφού $AB = BA \neq \mathbb{I}$, σημαίνει πως αντιμετατίθονται, αλλα δεν είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

Ισχύει η επόμενη πρόταση:

Πρόταση 13.26. *Έστω ο πίνακας $A_{n\times n}$ και $\mathbb{E}$ το σύνολο των πινάκων $\mathbb{X}$ με την ιδιότητα $\mathbb{X}A = A\mathbb{X}$. Τότε:*

1. $\mathbb{E} \neq \emptyset$
2. *Αν ο πίνακας $M \in \mathbb{E}$, τότε και ο $\lambda \cdot M \in \mathbb{E}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.*
3. *Αν οι πίνακες $M, N \in \mathbb{E}$ τότε και οι πίνακες $(M + k \cdot N)$, $(k \cdot M \cdot N)$ με $k \in \mathbb{R}$, είναι στοιχεία του συνόλου $\mathbb{E}$.*
4. *Αν $\mathbb{X}A = A\mathbb{X} = \mathbb{I}$ τότε ο πίνακας $\mathbb{X}$ ονομάζεται αντίστροφος του A και είναι μοναδικός. Γράφουμε τότε $\mathbb{X} = A^{-1}$.*
5. *Αν ο πίνακας $\mathbb{X}$ αντιστρέφεται, τότε και ο αντίστροφός του, ο $\mathbb{X}^{-1}$ ανήκει στο σύνολο $\mathbb{E}$.*

Απόδειξη. 1. Ένας πίνακας με την ιδιότητα του πίνακα $\mathbb{X}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας $\mathbb{I}_{n\times n}$ αφού $\mathbb{I}A = A\mathbb{I}$ οπότε $\mathbb{I}_{n\times n} \in \mathbb{E}$, και άρα $\mathbb{E} \neq \emptyset$.

2. Αν $M \in \mathbb{E}$, τότε $MA = AM$, οπότε $(\lambda M)A = \lambda(MA) = \lambda(AM) = A(\lambda M)$. Άρα $\lambda M \in \mathbb{E}$.

3. Είναι $MA = AM$ και $NA = AN$ οπότε

$$\begin{aligned}(M + kN)A &= MA + kNA\\ &= AM + kAN\\ &= A(M + kN)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(kMN)A &= kM(NA)\\ &= kM(AN)\\ &= k(MA)N\\ &= k(AM)N\\ &= A(kMN)\end{aligned}$$

4. Έστω ότι υπάρχει ένας πίνακας $B \neq \mathbb{X}$ τέτοιος ώστε $BA = AB = \mathbb{I}$. Θα δείξουμε ότι $B = \mathbb{X}$. Είναι

$$\begin{aligned}AB &= \mathbb{I} \Leftrightarrow\\ \mathbb{X}AB &= \mathbb{X}\mathbb{I} \Leftrightarrow\\ \mathbb{I}B &= \mathbb{X} \Leftrightarrow\\ B &= \mathbb{X}\end{aligned}$$

5. Είναι

$$\begin{aligned}\mathbb{X}A &= A\mathbb{X} \Leftrightarrow\\ \mathbb{X}^{-1}\mathbb{X}A &= \mathbb{X}^{-1}A\mathbb{X} \Leftrightarrow\\ \mathbb{I}A\mathbb{X}^{-1} &= \mathbb{X}^{-1}A\mathbb{X}\mathbb{X}^{-1} \Leftrightarrow\\ A\mathbb{X}^{-1} &= \mathbb{X}^{-1}A\mathbb{I} \Leftrightarrow\\ A\mathbb{X}^{-1} &= \mathbb{X}^{-1}A\end{aligned}$$

□

Ισχυρισμός 13.27. *Οι γνωστές ταυτότητες*

$$\begin{aligned}(A \pm B)^2 &= A^2 \pm 2AB + B^2\\ A^2 - B^2 &= (A-B)(A+B)\\ A^3 - B^3 &= (A-B)(A^2 + AB + B^2) \quad \textit{κτλπ.}\end{aligned}$$

που ισχύουν για τους πραγματικούς αριθμούς, ισχύουν και για τους πίνακες.

Αντιπαράδειγμα 13.28. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Έχουμε τότε $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ενώ $(A-B)(A+B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Άρα $A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B)$. Όμοια και για τις άλλες ταυτότητες.

Συμπέρασμα 13.29. *Οι γνωστές ταυτότητες των πραγματικών αριθμών με δύο* [2] *μεταβλητές ισχύουν και για τους πίνακες αν και μόνο αν οι δύο πίνακες αντιμετατίθενται ως προς τον πολλαπλασιασμό.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε την ταυτότητα $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$. Ισχύει ότι $AB = BA$ και έχουμε

$$\begin{aligned}(A-B)(A+B) &= A^2 + AB - BA - B^2 \Leftrightarrow\\ &= A^2 + AB - AB - B^2 \Leftrightarrow\\ &= A^2 - B^2\end{aligned}$$

Όμοια και για τις άλλες ταυτότητες. □

[2] Για ταυτότητες με περισσότερες μεταβλητές, απαιτούνται για την ισχύ τους πολλές συνθήκες ως προς την αντιμεταθετικότητα και κατά περίπτωση διαφορετικές.

Πρόταση 13.30. *Αν* $A = B$ *τότε* $A^2 = B^2$.

Ισχυρισμός 13.31. *Αν* $A^2 = B^2$ *τότε* $A = B$ *ή* $A = -B$.

Υπάρχουν δύο λόγοι που αυτό δεν είναι σωστό. Ο πρώτος λόγος είναι ότι ΔΕΝ ισχύουν οι ταυτότητες, όπως είδαμε και πριν. Έτσι δε γίνεται να γράψουμε ότι $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) = \mathbb{O}$ εκτός αν οι δύο πίνακες αντιμετατίθενται.
Ακόμα και αν ισχύει ότι $AB = BA$ υπάρχει και δεύτερος λόγος που αυτό δεν είναι σωστό : Το γινόμενο δύο μη μηδενικών πινάκων μπορεί να είναι ένας μηδενικός πίνακας. Οπότε σε αυτή την περίπτωση είναι λάθος από την ισότητα $(A - B)(A + B) = \mathbb{O}$ να εξάγουμε ότι $A - B = \mathbb{O} \Rightarrow A = B$ ή $A + B = \mathbb{O} \Rightarrow A = -B$.

Αντιπαράδειγμα 13.32. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Έχουμε $A^2 = B^2 = \mathbb{I}$ και παρά το ότι ισχύει $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) = \mathbb{O}$ αφού $AB = BA$, είναι όμως $A \neq B$ και $A \neq -B$.

Παρατήρηση 13.33. *Γενικά ισχύει ότι αν* $A = B$ *τότε* $A^n = B^n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *αλλά το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει για τους λόγους που αναφέρθηκαν.*

Αντιπαράδειγμα 13.34. Για τους προηγούμενους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι $A^{10} = B^{10} = \mathbb{I}$ ενώ $A \neq B$ και $A \neq -B$.

Ισχυρισμός 13.35. *Αν* $A^n = A^k$ *με* $n, k \in \mathbb{N}$ *και* $A \neq \mathbb{I}, \mathbb{O}$, *τότε* $n = k$.

Εδώ έχουμε

$$\begin{aligned} A^n = A^k &\Rightarrow \\ A^n - A^k = \mathbb{O} &\Rightarrow \\ A^n\left(\mathbb{I} - A^{k-n}\right) = \mathbb{O} &\Rightarrow \end{aligned}$$

αλλά όπως είδαμε και πριν, είναι λάθος να συμπεράνουμε ότι $A^n = \mathbb{O}$ ή $A^{k-n} = \mathbb{I}$. Ακόμα και αν αυτό ισχύει, τότε ΔΕΝ ισχύει οπωσδήποτε ότι $k - n = 0 \Rightarrow k = n$ γιατί ο πίνακας A μπορεί να είναι μοναδοδύναμος με κάποιο δείκτη που είναι διαρέτης του $k - n$.

Αντιπαράδειγμα 13.36. Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ισχύει ότι $A^4 = A^{10} = \mathbb{I}$.

Πρόταση 13.37. *Αν $A = B$ τότε $|A| = |B|$.*

Ισχυρισμός 13.38. *Αν $|A| = |B|$ τότε $A = B$.*

Αντιπαράδειγμα 13.39. Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Έχουμε τότε $|A| = |B| = 0$ αλλά $A \neq B$.

Ισχυρισμός 13.40. *Αν δύο πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, τότε και το άθροισμά τους αντιστρέφεται.*

Αντιπαράδειγμα 13.41. Οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμοι αφού $|A| = -1 \neq 0$ και $|B| = 1 \neq 0$. Όμως το άθροισμά τους είναι $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, οπότε $|A + B| = 0$ και άρα ΔΕΝ αντιστρέφεται.

Ισχυρισμός 13.42. *Αν δύο πίνακες ΔΕΝ είναι αντιστρέψιμοι, τότε και το άθροισμά τους ΔΕΝ αντιστρέφεται.*

Αντιπαράδειγμα 13.43. Οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ΔΕΝ είναι αντιστρέψιμοι αφού $|A| = 0$ και $|B| = 0$. Όμως το άθροισμά τους είναι $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, οπότε $|A + B| = -1 \neq 0$ και άρα αντιστρέφεται.

Συμπέρασμα 13.44. *Το άθροισμα πινάκων μπορεί να είναι ή και να μην είναι αντιστρέψιμο, ανεξάρτητα από την αντιστρεψιμότητα καθενός από αυτών ξεχωριστά.*

Ισχύει όμως η επόμενη πρόταση σχετικά με την αντιστρεψιμότητα των πινάκων και του γινόμενου αυτών.

Πρόταση 13.45. *Οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι αν και μόνο αν το γινόμενό τους AB αντιστρέφεται. Επιπλέον είναι* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Απόδειξη. Ο πίνακας AB αντιστρέφεται αν και μόνο αν $|AB| \neq 0$. Έχουμε τότε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} |AB| \neq 0 &\Leftrightarrow \\ |A| \cdot |B| \neq 0 &\Leftrightarrow \\ |A| \neq 0 \text{ και } |B| \neq 0 &\Leftrightarrow \\ \text{A και B αντιστρέψιμοι} & \end{aligned}$$

Επίσης είναι $ABB^{-1}A^{-1} = A\mathbb{I}A^{-1} = \mathbb{I}$ και $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}\mathbb{I}B = \mathbb{I}$. □

Παρατήρηση 13.46. *Αν επιπλέον οι πίνακες A και B αντιμετατίθενται, δηλαδή* $AB = BA$, *τότε ισχύει* $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ *αφού είναι* $(AB)^{-1} = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. *Επίσης και οι αντίστροφοι πίνακες των A και B αντιμετατίθενται, δηλαδή* $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, *αφού* $(AB)^{-1} = (BA)^{-1}$.

Παρατήρηση 13.47. *Αν ο πίνακας A αντιστρέφεται ενώ ο AB όχι, τότε και ο πίνακας B ΔΕΝ αντιστρέφεται, γιατί αν ήταν αντιστρέψιμος θα ήταν αντιστρέψιμος και ο AB, που είναι άτοπο.*

Πρόταση 13.48. *Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες. Αν $AB = BA$ τότε $(AB)^n = A^n B^n$ με $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Για $n = 1$ ισχύει, και έστω ότι ισχύει για τυχαίο $n \in \mathbb{N}$ με $n > 1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει

$$(AB)^{n+1} = A^{n+1}B^{n+1}$$

Είναι

$$\begin{aligned}(AB)^{n+1} &= A\underbrace{(BA)(BA)\cdots(BA)}_{n \text{ όροι}}B \\ &= A(BA)^n B \\ &= A(AB)^n B \\ &= AA^n B^n B \\ &= A^{n+1}B^{n+1}\end{aligned}$$

□

Ισχυρισμός 13.49. *Αν $(AB)^n = A^n B^n$ με $n \in \mathbb{N}$ τότε $AB = BA$.*

Αντιπαράδειγμα 13.50. Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Έχουμε τότε $(AB)^2 = A^2B^2 = \mathbb{O}$ ενώ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $BA = \mathbb{O}$, δηλαδή $AB \neq BA$.

Παρατήρηση 13.51. *Αυτο συμβαίνει γιατί οι πίνακες A και B ΔΕΝ είναι αντιστρέψιμοι, αφού $|A| = |B| = 0$.*

Μέρος III

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α΄

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Αρχή του Ελαχίστου : [1]

Κάθε μη κενό υποσύνολο S των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο.
Δηλαδή, υπάρχει $a \in S$ τέτοιο ώστε $a \leqslant s$ για κάθε $s \in S$.

Αρχή της Επαγωγής :

Έστω ένα σύνολο $S \subset \mathbb{N}$ το οποίο ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Ο αριθμός 1 ανήκει στο S.
2. Αν $n \in S$ τότε $n + 1 \in S$.

Τότε έχουμε $S = \mathbb{N}$.

Πρόταση Α΄.1. *Η Αρχή του Ελαχίστου και η Αρχή της Επαγωγής είναι λογικά ισοδύναμες προτάσεις.*

Απόδειξη. .
Ευθύ: Θα αποδείξουμε την Αρχή της Επαγωγής με βάση την Αρχή του Ελαχίστου.
Έστω σύνολο $S \subset \mathbb{N}$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις της Αρχής της Επαγωγής, και το συμπλήρωμα αυτού, το σύνολο $\mathbb{N} \backslash S = \{$οι φυσικοί $n \notin$

[1] Είναι γνωστή και σαν Αρχή της Καλής Διάταξης (Well-Ordering Principle)

$S\}$. Αν υποθέσουμε ότι $S \neq \mathbb{N}$, το σύνολο $\mathbb{N} \backslash S$ είναι μη κενό. Τότε, σύμφωνα με την Αρχή του Ελαχίστου, το $\mathbb{N} \backslash S$ έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω a. Όμως $1 \in S \Rightarrow 1 \notin \mathbb{N} \backslash S$, οπότε $a > 1$ και επειδη a είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{N} \backslash S$, έχουμε $a - 1 \in S$. Οπότε από τη (β΄) υπόθεση της Αρχής της Επαγωγής ισχύει ότι

$$(a-1) + 1 \in S \tag{Α΄.1}$$

$$a \in S \tag{Α΄.2}$$

Άτοπο, αφού το a ανήκει στο συμπλήρωμα του S. Άρα το σύνολο $\mathbb{N} \backslash S$ είναι κενό, οπότε $S = \mathbb{N}$.

Αντίστροφο: Θα αποδείξουμε την Αρχή του Ελαχίστου με βάση την Αρχή της Επαγωγής.

Έστω μη κενό σύνολο $S \subset \mathbb{N}$ το οποίο ας υποθέσουμε ότι δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Αφού το S είναι υποσύνολο των φυσικών, υπάρχει ένα σύνολο φυσικών, έστω A, τέτοιο ώστε να περιέχει όλους τους φυσικούς που είναι μικρότεροι από όλα τα στοιχεία του S. Άρα το 1 ανήκει στο A, γιατί αλλιώς θα ήταν το ελάχιστο στοιχείο του S. Έστω ότι $n \in A$, τότε για κάθε $s \in S$ είναι $n < s$. Όμως αφού από την υπόθεση το S δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, έχουμε ότι $n + 1 \notin S$, γιατί διαφορετικά το $n + 1$ θα ήταν το ελάχιστο στοιχείο του S, αφού το αμέσως προηγούμενό του, το n, ανήκει στο A. Σύμφωνα όμως με την Αρχή της Επαγωγής, αφού $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$, οπότε $A = \mathbb{N}$ και άρα το S είναι κενό, άτοπο.

Επομένως, το μη κενό σύνολο $S \subset \mathbb{N}$, έχει ελάχιστο στοιχείο. □

Πρόταση Α΄.2 (Μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής)**.** *Έστω $P(n)$ μια πρoτάση που εξαρτάται από το φυσικό αριθμό n. Αν υποθέσουμε ότι:*

1. *Η πρόταση $P(1)$ αληθεύει.*
2. *Για κάθε $n > 1$, αν η πρόταση $P(n)$ αληθεύει, τότε και η $P(n+1)$ αληθεύει.*

Τότε η πρόταση $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n \geqslant 1$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τη Μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής με βάση την Αρχή του Ελαχίστου.
Έστω ότι η πρόταση $P(1)$ αληθεύει, και για κάθε $n > 1$, που η πρόταση $P(n)$ αληθεύει, τότε και η $P(n+1)$ αληθεύει. Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση $P(n)$ ΔΕΝ αληθεύει για κάθε $n \geqslant 1$. Έτσι, θα υπάρχει κάποιο n για το οποίο η $P(n)$ δεν αληθεύει, οπότε το σύνολο των φυσικών που αποτελείται από όλα στοιχεία για το οποία η $P(n)$ δεν αληθεύει, έστω A, είναι μη κενό. Σύμφωνα με την Αρχή του Ελαχίστου, αυτό το σύνολο θα έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω a. Άρα $P(a)$ δεν αληθεύει, και $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n < a$.
Το a δε μπορεί να είναι το 1, γιατί το $P(1)$ αληθεύει από την υπόθεση. Οπότε $a > 1$. Έτσι $a - 1 \notin A$, και άρα η πρόταση $P(a-1)$ είναι αληθής. Αλλά από την υπόθεση, έχουμε ότι και η $P[(a-1)+1] = P(a)$ πρέπει να είναι αληθής, άτοπο.
Άρα η πρόταση $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n \geqslant 1$. $\square$

Παράρτημα Β΄

ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Πρόταση Β΄.1. [1] *Μια υπακολουθία της ακολουθίας a_n συγκλίνει στο x αν και μόνο αν το x είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας a_n.*

Όμως για κάθε φραγμένη ακολουθία, υπάρχει πάντα μία τουλάχιστον υπακολουθία αυτής που συγκλίνει. Άρα έχουμε το εξής:

Θεώρημα Β΄.2 (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες.)**.** *Κάθε φραγμένη ακολουθία, έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης.*

Πρόταση Β΄.3. [2] *Το στοιχείο x είναι σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου A, αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία a_n στοιχείων του A, διαφορετικών ανά δύο, που συγκλίνει στο x.*

Σημαντικό είναι επίσης να γνωρίζουμε ότι:

Πόρισμα Β΄.4. *Για κάθε σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου A, υπάρχουν άπειρα (τολάχιστον αριθμήσιμα) το πλήθος, διάφορα μεταξύ τους, σημεία του A, που ανήκουν σε μια περιοχή του σημείου συσσώρευσης.*

[1] Βλέπε 15, σελ.82.
[2] Βλέπε 15, σελ.83-84.

Η απειρία των σημείων ενός συνόλου είναι αναγκαία μόνο συνθήκη για να έχει αυτό το σύνολο σημεία συσσώρευσης. Για παράδειγμα το σύνολο των φυσικών αριθμών, έχει άπειρα σημεία χωρίς κανένα σημείο συσσώρευσης. Αν επιπλέον το σύνολο είναι και φραγμένο, τότε έχουμε και την ικανή συνθήκη, δηλαδή:

Θεώρημα Β΄.5 (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για σύνολα.)**.** *Κάθε φραγμένο και με άπειρο πλήθος σημείων σύνολο, έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης.*

1. Μια ακολουθία συγκλίνει αν

   - είναι φραγμένη
     και
   - έχει ΈΝΑ ΜΟΝΟ σημείο συσσώρευσης.

   Επομένως συγκλίνει σε αυτό το σημείο συσσώρευσης.
   Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας και απο τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης.[3]

2. Μια ακολουθία έχει σημείο συσσώρευσης αν

   - το σύνολο τιμών της, έχει σημείο συσσώρευσης
     ή
   - υπάρχει τιμή της, που την παρουσιάζει άπειρες φορές.

Παράδειγμα Β΄.6. [4] Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\{-1, 1\}$ που περιέχει δύο μόνο τιμές. Άρα το σύνολο τιμών ΔΕΝ έχει σημείο συσσώρευσης.
Όμως οι τιμές -1 και 1 παρουσιάζονται άπειρες φορές από την ακολουθία, οπότε η a_n έχει δύο σημεία συσσώρευσης. Έτσι βλέπουμε ότι παρόλο που το σύνολο τιμών ΔΕΝ έχει σημείο συσσώρευσης, η ακολουθία έχει και μάλιστα δύο.
Άρα η a_n είναι φραγμένη αλλά με δύο σημεία συσσώρευσης, οπότε ΔΕ συγκλίνει.

[3] Για απόδειξη βλέπε 21, σελ.153.
[4] Βλέπε το [4] στη σελ.45

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 1ο:
Αν το x είναι σημείο συσσώρευσης μιας ακολουθίας a_n δε σημαίνει απαραίτητα ότι είναι σημείο συσσώρευσης και του συνόλου τιμών της. [5]

Παράδειγμα Β΄.7. Η ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ άρτιος} \end{cases} = (1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, \ldots)$$

έχει δύο σημεία συσσώρευσης, τα 0 και 1. Όμως το σύνολο τιμών της ακολουθίας, είναι το

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots)$$

και έχει σημείο συσσώρευσης μόνο το 0.
Άρα η a_n είναι φραγμένη αλλά με δύο σημεία συσσώρευσης, οπότε ΔΕ συγκλίνει.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 2ο:
Ένα σημείο συσσώρευσης x_0 μιας ακολουθίας a_n είναι και σημείο συσσώρευσης του συνόλου τιμών αυτής, αν και μόνο αν, υπάρχει υπακολουθία της ακολουθίας a_n, με όρους διάφορους ανά δύο, που συγκλίνει στο σημείο συσσώρευσης x_0.

Παράδειγμα Β΄.8. Η ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 2k - 1 \\ n, & n = 2k \end{cases} = (1, 2, 1, 4, 1, 6, \ldots)$$

όπου k θετικός ακέραιος, έχει ένα μόνο σημείο συσσώρευσης, το 1, ενώ το σύνολο τιμών της ακολουθίας κανένα.
Η ακολουθία a_n ΔΕΝ είναι φραγμένη και έχει ένα μόνο σημείο συσσώρευσης, και άρα αποκλίνει.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 3ο:
Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του συνόλου τιμών μιας ακολουθίας είναι υποσύνολο του συνόλου των σημείων συσσώρευσης της ακολουθίας.[6]

[5] Βλέπε το [15] στη σελ.84, καθώς και το [21] στη σελ.151.
[6] Για απόδειξη βλέπε 21, σελ.150.

Παράρτημα Γ΄

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Πρόβλημα Γ΄.1. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $D \subseteq \mathbb{R}$. Στο τυχαίο σημείο $x_0 \in D$ είναι

$$f'(x_0) = a \in \mathbb{R}$$

Όμως από τον ορισμό της παραγώγου, έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{0}{0}$$

και με εφαρμογή του κανόνα De L'Hospital έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

οπότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x) = a \in \mathbb{R}$$

Αν όμως το $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 \in D$.
Άτοπο, γιατί υπάρχουν συναρτήσεις με ΑΣΥΝΕΧΗ παράγωγο. [1]

[1] Επίσης από το Θ. Darboux συνάγεται ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις με παράγωγο που έχει αιρόμενη ασυνέχεια ή πηδήματα. Η παράγωγος είτε θα είναι συνεχής είτε θα έχει ουσιώδη ασυνέχεια (2ου είδους). Βλέπε [15], σελ.288.

Για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

του παραδείγματος 9.29 στη σελ. 147, βλέπουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ και άρα η f' παρουσιάζει ουσιώδη ασυνέχεια στο $x = 0$.
Όμως η $f'(0)$ υπάρχει και ισούται με μηδέν!
Οπότε, αν υπάρχει η $f'(x_0)$ δε σημαίνει απαραίτητα ότι υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, γιατί τότε θα είχαμε οπωσδήποτε την $f'(x)$ συνεχή στο x_0, πράγμα άτοπο, αφού υπάρχουν συναρτήσεις με μη συνεχή παράγωγο. Επίσης ούτε το αντίστροφο ισχύει. Δηλαδή, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, δε συνεπάγεται ότι υπάρχει και η $f'(x_0)$. Απαραίτητη προϋπόθεση για να έχουμε αυτό το συμπέρασμα είναι η συνέχεια της f και ειδικά στο x_0.
Ισχύει το εξής:

Πόρισμα Γ΄.2. [2] *Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα D και παραγωγίσιμη στο $D \setminus \{x_0\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, τότε υπάρχει και η $f'(x_0)$ και είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.*

Είναι αδύνατο για τη συνεχή f να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ και να μην είναι ίσο με $f'(x_0)$. Δηλαδή η $f'(x)$ θα είναι συνεχής στο x_0.
Επίσης ισχύει το παρακάτω:

Πόρισμα Γ΄.3. [3] *Αν η $f'(x)$ υπάρχει στο διάστημα $[a, b]$, τότε η $f'(x)$ δε μπορεί να έχει πεπερασμένα πηδήματα στο $[a, b]$.*

Η f παρουσιάζει πεπερασμένο πήδημα [4] στο x_0, αν τόσο το αριστερό όσο και το δεξιό όριο της f στο x_0 υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι διάφορα μεταξύ τους, δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

[2] Βλέπε 17, πόρισμα 18.24.
[3] Βλέπε [4], σελ.160, ασκ.15
[4] Βλέπε [4], σελ.122

Άρα η $f'(x)$ ή θα είναι συνεχής ή θα είναι ασυνεχής με ουσιώδη ασυνέχεια. [5]

Απαντάμε έτσι και στο ερώτημα:

Είναι σωστό να υπολογίζουμε την $f'(x)$ στο x_0 όπου αλλάζει ο τύπος της f χωρίς τη χρήση του ορισμού της παραγώγου, δηλαδή χωρίς τον υπολογισμό του $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ αλλά να υπολογίζουμε μόνο το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$;

Απάντηση:

Όχι, γιατί αν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, δεν έχουμε απαραίτητα και τη μη ύπαρξη της παραγώγου $f'(x_0)$. Απλά μπορεί να σημαίνει ότι η $f'(x)$ είναι ασυνεχής στο x_0. Αν όμως υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, τότε είναι και η f' συνεχής στο x_0.

Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$$

του παραδείγματος 9.27 στη σελ. 147, παρά το ότι έχει $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=1$ ενώ η $f'(0)$ δεν υπάρχει, δεν έρχεται σε αντίφαση με τα προηγούμενα, γιατί δεν είναι συνεχής στο μηδέν. Έτσι δεν έχει εφαρμογή το πόρισμα Γ΄.2 στη σελ. 224.

[5] Βλέπε [16], σελ.103,104,106

Βιβλιογραφία

[1] Παντελίδης Γ.-Κραββαρίτης Δ. (Επεξεργασία-Μετάφραση). *Λεξικό Μαθηματικών (Duden, Rechnen und Mathematik)*. Εκδόσεις Πατάκη, 1997.

[2] Andrei Bourchtein and Ludmila Bourchtein. *Counterexamples: From Elementary Calculus to the Beginnings of Analysis*. CRC Press, 2015.

[3] Bernard R. Gelbaum - John M. H. Olmsted. *Counterexamples in Analysis*. Dover, 2003.

[4] Brand Louis. *Μαθηματική Ανάλυση (Advanced Calculus)*. Ε.Μ.Ε., 1984.

[5] Marcus Du Sautoy. *Η Μουσική των Πρώτων Αριθμών The Music of the Primes*. Εκδόσεις Τραυλός, 2005.

[6] Rundin Walter. *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως Principles of Mathematical Analysis, 3nd edition*. Έκδοση 1η. Εκδόσεις Leader Books, 2000.

[7] Sergiy Klymchuk. *Counterexamples in Calculus*. Mathematical Association of America, 2010.

[8] Spivak Michael. *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (Calculus, 2nd edition)*. Έκδοση 8η. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2004.

[9] Thomas B. George, Finney L. Ross. *Απειροστικός Λογισμός (Calculus and Analytic Geometry, 6nd edition)*. Έκδοση 6η. Α, Β τόμοι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001.

[10] Μπαϊλάκης Γ. *Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Συναρτήσεις*. Εκδόσεις Πελεκάνος, 1992.

[11] Παντελίδης Γ. *Ανάλυση, τεύχος 'Α*. Εκδόσεις Ζήτη, 2000.

[12] Παντελίδης Γ. *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα Ανάλυση της Γ'Λυκείου*. Εκδόσεις Ζήτη, 2006.

[13] Πλάταρος Γ. «Η διδασκαλία του Απειροστικού λογισμού μέσω Αντιπαραδειγμάτων». Διπλωματική εργασία. Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2004.

[14] Γεωργακίλας. *Ανάλυση Γ' Λυκείου Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης*. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη - Χ. Βαφειάδης, 2003.

[15] Κάππος Δ. *Απειροστικός Λογισμός*. Έκδοση Β'. Τόμ. Α. 1962.

[16] Στρατηγόπουλος Δ. *Πραγματική Ανάλυση*. Τόμ. Α. Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1993.

[17] Νεγρεπόντης Σ.-Γιωτόπουλος Σ.-Γιαννακούλιας Ε. *Απειροστικός Λογισμός*. Ι, ΙΙα τόμοι. Εκδόσεις Συμμετρία, 1999.

[18] Σπανδάγος Ε. *Ολοκληρωτικός Λογισμός 1*. Εκδόσεις Αίθρα, 2003.

[19] Βουκούτης Ν. *Ακολουθίες*.

[20] Δραγώνας Χ.-Σκοπέτος Δ.-Φραγκίσκος Ν. *Μεθοδολογία των Συναρτήσεων*. Τόμ. Ι. 1993.

[21] Δρόσος Κ.-Σιαφαρίκας Π. *Βασική Αφηρημένη Ανάλυση - Θεωρία και λυμένες ασκήσεις*. Δεύτερη Έκδοση. 1997.

[22] Μιχάλης Παπαδημητράκης. *Ανάλυση, Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής*. 2015.

[23] Μπόρης Ρ. *Έννοιες και Προτάσεις Μαθηματικής Αναλύσεως*. Εκδόσεις Δωδώνη, 1982.

[24] Σπανδάγος Ε.-Σπανδάγου Ρ. *Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών*. Εκδόσεις Αίθρα, 2004.

[25] Σπανδάγος Ε.-Σπανδάγου Ρ. *Μαθηματικά Παράδοξα και Μαθηματικά Παιχνίδια*. Εκδόσεις Αίθρα, 2003.

[26] Ντούγιας Κ. Σωτήρης. *Απειροστικός Λογισμός 1*. Εκδόσεις Leader Books, 1998.

Ευρετήριο